

Материалы к Главе III

Гальванометры

А. Магнитоэлектрический гальванометр (прибор для измерения силы тока) – легкая металлическая рамка с моментом инерции I и током J , укрепленная на упругой нити с коэффициентом упругости f и помещенная между полюсами магнита. Со стороны магнитного поля на такую рамку с током действует момент сил M_J , пропорциональный силе тока:

$$I \ddot{\alpha} + k \dot{\alpha} + f\alpha = 0, \quad \ddot{\alpha} + \delta \dot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0, \quad M_J = f\alpha = a \cdot J, \quad J = \frac{f}{a} \cdot \alpha.$$

Коэффициент пропорциональности a зависит от конкретного устройства прибора (числа витков, силы магнита, упругости нити и т.д.). **Коэффициент затухания δ** должен быть **значительным**, чтобы время установления равновесия рамки τ было мало – заметно меньше характерного времени T изменения силы тока, протекающего через гальванометр – $\tau = \frac{1}{\delta} \ll T$.

Б. Баллистический гальванометр (прибор для измерения величины заряда).

В таких гальванометрах **затухание должно быть как можно меньше**, а **период собственных колебаний рамки как можно больше** (10÷20 с) времени прохождения тока через гальванометр.

Уравнение движения рамки в свободном состоянии – уравнение моментов для абсолютно твердого тела:

$$I \ddot{\alpha} + f \cdot \alpha = 0,$$

где α – угол отклонения рамки из положения равновесия. Решением этого уравнения являются гармонические колебания с частотой ω_0 и периодом T_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{f}{I}}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}.$$

Пусть время импульса тока $T \ll T_0$, тогда за это время рамка не успевает заметно сместиться, и на нее подействует импульс момента силы:

$$\int_T M_J dt = \int_T aJ dt = aq,$$

где q – полный заряд, прошедший за время T через рамку. За это время рамка приобретает момент импульса, равный импульсу момента силы:

$$I\beta_0 = aq,$$

где β_0 – угловая скорость движения рамки сразу после действия импульса тока. За это же время она приобретает кинетическую энергию, которая после **максимального отклонения рамки α_0** перейдет в потенциальную:

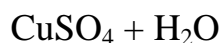
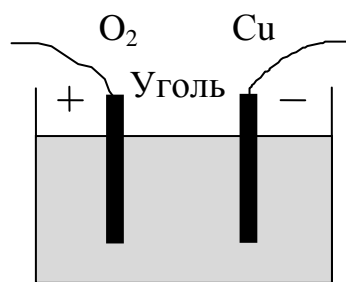
$$\frac{I\beta_0^2}{2} = \frac{a^2 q^2}{2I} = f \frac{\alpha_0^2}{2}.$$

Окончательно получим:

$$a^2 q^2 = If\alpha_0^2 q \text{ и } q = \frac{\sqrt{fI}}{a} \alpha_0 = b \cdot \alpha_0,$$

где b – баллистическая постоянная данного прибора.

Примеры электролиза

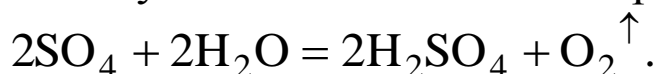


Опустим в водный раствор медного купороса CuSO_4 два угольных стержня и соединим их с полюсами батареи гальванических элементов (рис.). На стержне, заряженном отрицательно, выделится блестящий слой меди. У второго стержня будет выделяться кислород, а в растворе появится серная кислота.

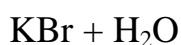
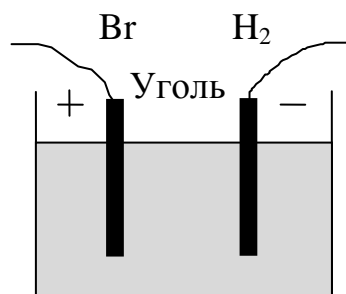
Вначале происходит диссоциация молекул водного купороса:



Затем в электрическом поле электродов происходит разделение ионов и их движение в сторону электродов. Вторичная реакция будет происходить у положительного электрода:



Следующий пример – водный раствор бромистого калия KBr (рис.).

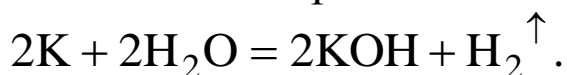


На стержне, заряженном положительно, выделится бурый слой брома. У второго стержня будет выделяться водород, а в растворе появится щелочь KOH .

Вначале происходит диссоциация бромистого калия:



Затем – разделение ионов в электрическом поле электродов и их движение в сторону электродов. Вторичная реакция будет происходить у отрицательного электрода:



На отрицательном полюсе (катоде) всегда выделяются металлы или водород, на положительном (аноде) – остаток химического соединения или кислород. Составные части электролита выделяются только на электродах.

Граничные условия и поверхностное распределение зарядов

Основные три не зависящие от материальных уравнений граничных условия в случае стационарных токов, а значит и стационарных электрических полей.

	\mathbf{D}	\mathbf{E}	\mathbf{j}
$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$	$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$		
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$		$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$	
$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$			$j_{2n} - j_{1n} = 0$

Остальные шесть граничных условий возникают благодаря наличию материальных уравнений для обеих сред. Для линейных и изотропных сред:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{j} &= \lambda \mathbf{E}. \end{aligned}$$

А. Поверхность раздела двух проводников

В этом случае:

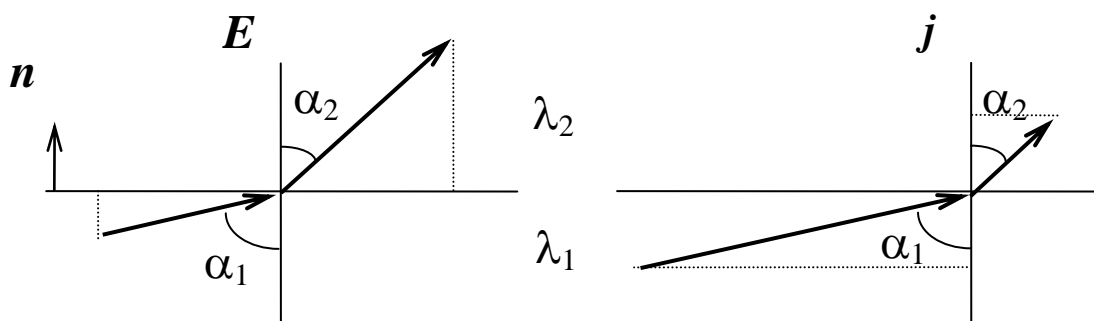
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 \Rightarrow \mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_1, \mathbf{D}_2 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_2;$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow \mathbf{j}_1 = \lambda_1 \mathbf{E}_1, \mathbf{j}_2 = \lambda_2 \mathbf{E}_2.$$

	D	E	j
$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$	$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$	$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	$\frac{1}{\lambda_2} j_{2n} - \frac{1}{\lambda_1} j_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$	$D_{2\tau} - D_{1\tau} = 0$	$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$	$\frac{1}{\lambda_2} j_{2\tau} - \frac{1}{\lambda_1} j_{1\tau} = 0$
$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$	$\lambda_2 D_{2n} - D_{1n} = 0$	$\lambda_2 E_{2n} - \lambda_1 E_{1n} = 0$	$j_{2n} - j_{1n} = 0$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{\lambda_2} j_{2n} - \frac{\varepsilon_0}{\lambda_1} j_{1n} = \varepsilon_0 j_n \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right);$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} \cdot \frac{E_{1n}}{E_{1\tau}} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$



Б. Поверхность раздела проводника с диэлектриком

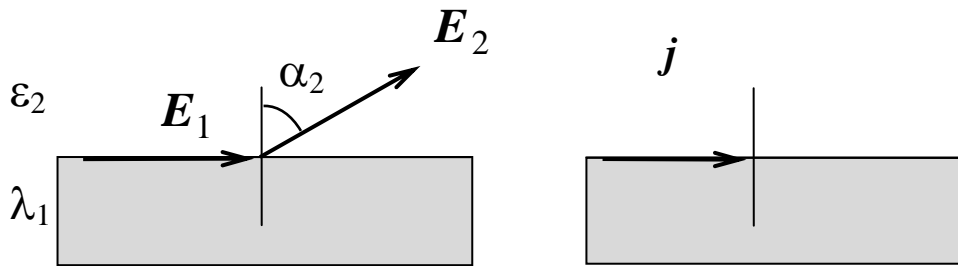
В данном случае:

$$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 \Rightarrow \mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_1, \mathbf{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \mathbf{E}_2;$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{j}_1 = \lambda_1 \mathbf{E}_1, \mathbf{j}_2 = 0.$$

	\mathbf{D}	\mathbf{E}	\mathbf{j}
$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$	$D_{2n} = \sigma$	$\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma$	–
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$	$\frac{1}{\varepsilon_2} D_{2\tau} - D_{1\tau} = 0$	$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$	–
$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$	$D_{1n} = 0$	$E_{1n} = 0$	$j_{1n} = 0$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} = E_{1\tau} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\sigma} = \frac{j_{1\tau}}{\lambda_1} \cdot \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\sigma} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\lambda_1} \cdot \frac{j_1}{\sigma}.$$



$$\sigma = \varepsilon_0 \varepsilon E_{2n},$$

$$\sigma' = -P_{2n} = -\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_{2n} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma.$$

Заметим, что поверхностные плотности свободных σ и сопутствующих им связанных σ' зарядов уменьшаются (вплоть до смены знака) вдоль направления тока в проводнике, обеспечивая величину и направление напряженности электрического поля внутри проводника.

Механизмы возникновения сторонних сил

Сторонние силы могут быть обусловлены следующими процессами:

1) **химическими** процессами в неоднородной среде (соприкосновение проводников различного химического состава) – гальванический элемент;

2) **термическими** процессами в неоднородной неоднородно нагретой среде (соприкосновение проводников с различной температурой) – термоэлемент, термопара;

3) **диффузионными** процессами в неоднородной среде (соприкосновение проводников с различной концентрацией носителей заряда) – концентрационный элемент;

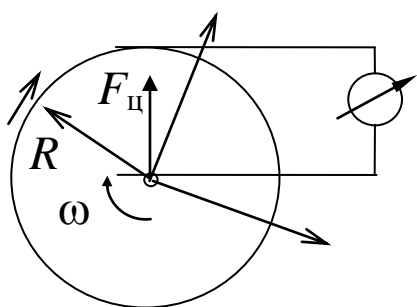
4) **электрическими** (не электростатическими) полями, порождаемыми, например, переменными магнитными полями (индукционными электрическими полями) – генераторы переменного тока;

5) **механическими** процессами – электростатический генератор Ван-де-Граафа, электростатическая машина;

6) **инерционными** процессами и т.д.

Примеры возникновения сторонних сил, вызванных различными процессами

А. Сторонние силы, вызванные инерционными процессами



Металлический диск радиуса R равномерно вращается с угловой скоростью ω относительно инерциальной системы отсчета (см. рис.).

В системе отсчета, связанной с диском, на электрон, находящийся на расстоянии r от центра диска, действует сила инерции – центробежная сила, направленная вдоль радиуса диска:

$$F_{ц} = m\omega^2 r,$$

где m – масса электрона. Разделив величину этой силы на величину заряда электрона, найдем напряженность сторонних (инерционных) сил:

$$E_{\text{ст}} = \frac{F_{\text{ц}}}{e} = \frac{m\omega^2 r}{e}.$$

Теперь посчитаем и работу, совершаемую этими силами при перемещении единицы заряда вдоль радиуса диска – так называемую электродвижущую силу, э.д.с.:

$$U_{\text{ст}} = \int_0^R E_{\text{ст}} \, dr = \int_0^R \frac{m\omega^2 r}{e} \, dr = \frac{m\omega^2 R^2}{2e}.$$

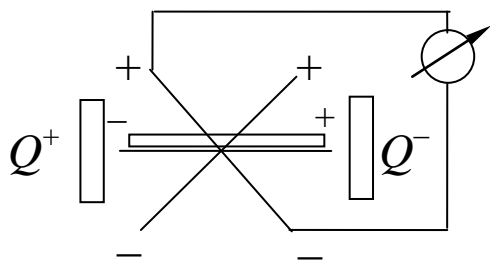
Пусть $R = 1$ м, $\omega = 2\pi \cdot 10^3$ с⁻¹ (параметры как у стиральной машины), при этом $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг:

$$U_{\text{ст}} = \frac{m\omega^2 R^2}{2e} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot (6.28 \cdot 10^3)^2 \cdot 1}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} \cong 1.1 \cdot 10^{-4} \text{ В} = 0.11 \text{ мВ}.$$

Что вполне измеримо, но не имеет практического применения. На практике для поддержания тока чаще всего используются индукционные и гальванические элементы.

Б. Электростатическая машина

Заряды Q^+ и Q^- создают электростатическое поле в пространстве между ними. Изолированные друг от друга проводящие пластины движутся по окружности вокруг оси под влиянием сторонних механических сил.



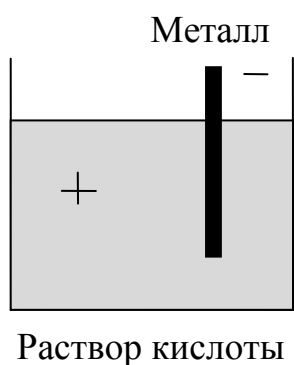
В горизонтальном положении эти пластины оказываются соединенными между собой неподвижным проводником (см. рис.).

В результате электрической индукции в этом положении пластины заряжаются зарядами разных знаков. При дальнейшем вращении их контакт прерывается и совершается работа по перемещению их в электростатическом поле зарядов Q^+ и Q^- . В следующем положении они вступают в контакт с электродами, на который эти заря-

ды переходят, и по цепи, соединяющей эти электроды, идет ток. Ток протекает импульсно – два раза за полный оборот вращающихся пластин. Если значительно увеличить число пар пластин, то можно получить практически постоянный ток.

В. Гальванический элемент

При соприкосновении твердого тела с жидкостью может произойти химическая реакция и возникнуть разность потенциалов.



Если металлическую пластинку опустить в водный раствор кислоты, то металл растворяется. При этом в раствор уходят положительные ионы металла, в результате чего концентрация ионов металла в растворе повышается и раствор заряжается положительно, а металлическая пластина – отрицательно (рис.).

Между раствором и пластиной возникает разность потенциалов, которая препятствует дальнейшему растворению металла.

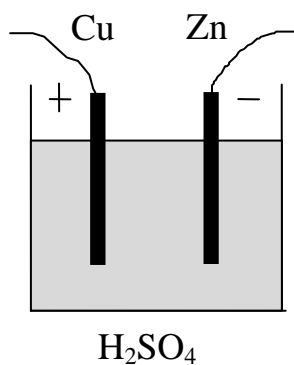
Сторонние силы химического происхождения сосредоточены в **тонком приповерхностном слое** соприкосновения пластины металла с раствором. Этот двойной электрический слой имеет молекулярную толщину. Сторонние силы обеспечивают постоянное пространственное разделение зарядов. В конечном итоге это разделение осуществляется за счет энергии, освобождаемой в химических реакциях.

При некоторой разности потенциалов переход ионов металла в раствор прекращается (концентрация ионов металла в растворе растет, растворимость металла в таком растворе падает, а разность потенциалов также растет) – наступает электрохимическое равновесие. При большой концентрации ионов металла в растворе может пойти обратный процесс.

Потенциал металлической пластины относительно раствора называется **электрохимическим потенциалом**. Электрохимический потенциал зависит от конкретной комбинации металла и

раствора, а также концентрации ионов металла в растворе. Электрохимическое взаимодействие конкретного металла и раствора характеризуется **абсолютным нормальным электрохимическим потенциалом** – электрохимическим потенциалом, возникающим между конкретным металлом и конкретным раствором, содержащим в 1 л раствора 1 моль ионов металла, деленный на валентность иона. Например, для растворов в серной кислоте H_2SO_4 этот потенциал для Zn равен -0.5 В, а для Cu – $+0.6$ В.

Если два различных металла погрузить в один и тот же раствор, то между ними возникнет разность потенциалов, равная разности их электрохимических потенциалов. Совокупность двух металлов (электродов) и раствора (электрохимического раствора) называется **гальваническим элементом**.

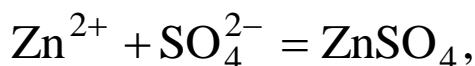


Гальванический элемент Вольта состоит из медной и цинковой пластинок, погруженных в раствор серной кислоты (рис.).

При разомкнутой внешней цепи возникают два двойных электрических слоя и устанавливается электрохимическое равновесие, при котором э.д.с. элемента Вольта равна 1.1 В.

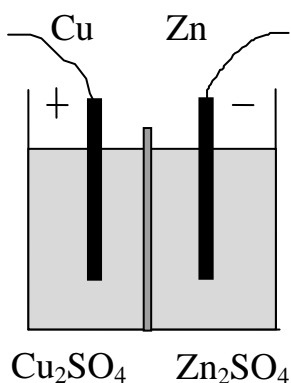
При замкнутой внешней цепи элемента Вольта возникает ток – электроны по внешней цепи переходят с электрода цинка на электрод меди, увеличивая потенциал электрода цинка и уменьшая потенциал электрода меди.

В связи с этим ионы Zn^{2+} переходят в раствор, где соединяются с отрицательными ионами SO_4^{2-} , на которые наряду с ионами $2H^+$ диссоциирует молекулы серной кислоты. В растворе происходит реакция:



продукты которой выпадают в виде осадка. Положительные ионы водорода устремляются к медной пластине и там нейтрализуются электронами тока проводимости в пластине. В результате на поверхности медной пластины образуется пленка водорода, которая с одной стороны увеличивает внутреннее сопротивление элемен-

та (затрудняя доступ последующим ионам водорода), а с другой, создает дополнительный электрохимический потенциал, направленный против потенциала, существовавшего там до образования пленки. В результате э.д.с. элемента уменьшается – это **процесс поляризации** элемента.



Гальванический элемент Даниэля состоит из двух электродов – медного и цинкового, помещенных в растворы медного CuSO_4 и цинкового купороса ZnSO_4 , соответственно (рис.).

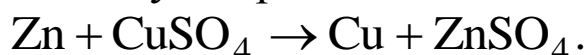
Растворы разделены пористой перегородкой, препятствующей их смешению, но не препятствующей обмену ионами SO_4^{2-} .

При разомкнутой внешней цепи устанавливается электрохимическое равновесие, при котором э.д.с. элемента Даниэля равна 1.1 В.

При замкнутой внешней цепи элемента Даниэля возникает ток – электроны по внешней цепи переходят с электрода цинка на электрод меди, увеличивая потенциал электрода цинка и уменьшая потенциал электрода меди.

В связи с этим ионы Zn^{2+} переходят в раствор медного купороса. Положительные ионы Cu^{++} устремляются к медной пластине и там нейтрализуются электронами тока проводимости в пластине, в результате чего медь осаждается на поверхности медной пластины.

Оставшиеся в растворе ионы SO_4^{2-} (с повышенной концентрацией) проникают через перегородку в другую часть элемента, соединяются там с ионами Zn^{2+} и образовавшийся избыток ZnSO_4 выпадает в виде осадка. Суммарная химическая реакция:



Процесс образования цинкового купороса идет с выделением энергии в количестве, которое превышает энергетические затраты на выделение меди из медного купороса. Термохимические измерения показывают, что в результате этой реакции выделяется

энергия $\Delta W \sim 2 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$, которая идет на работу сторонних сил (тока). Следовательно:

$$\Delta W = qU_{\text{ст}},$$

где q – переносимый заряд, содержащийся в одном моле цинка (меди):

$$q = 2eN_A.$$

Окончательно:

$$U_{\text{ст}} = \frac{\Delta W}{2eN_A} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 6.02 \cdot 10^{23}} \cong 1.04 \text{ В}$$

В электролите происходит движение ионов – Zn^{2+} , Cu^{2+} и SO_4^{2-} под действием электростатических полей рассеяния двойных слоев.

Таким образом, при работе элемента Даниэля никакой поляризации не возникает, а происходит лишь обеднение раствора медного купороса CuSO_4 , который необходимо пополнять.

Г. Аккумуляторы

Аккумуляторы – это гальванические элементы, в которых вещества, расходуемые при работе в качестве источника тока, накапливаются при пропускании через них тока от постоянного источника (зарядка аккумулятора). Наиболее распространенный – свинцовый аккумулятор, состоящий из двух пластин свинца, опущенных в раствор серной кислоты.

Методы решения задач для разветвленных цепей

Метод контурных токов

Для сложных цепей метод Кирхгофа приводит к необходимости решать систему из большого числа линейных алгебраических уравнений. Необходимы вспомогательные приемы, позволяющие уменьшить число уравнений системы. Один из них – метод контурных токов.

Метод контурных токов – метод расчета электрических цепей путем записи системы линейных алгебраических уравнений, в которой за неизвестные принимаются контурные токи в простых контурах цепи. Метод основывается на том свойстве, что ток в любой ветви цепи может быть представлен в виде алгебраической суммы независимых контурных токов, протекающих в этой ветви.

Рассмотрим все **простые контуры**, на которые распадается разветвленная цепь. Пусть каждый из этих контуров характеризуется током постоянной силы вдоль всего контура. Такие токи называются **контурными токами**. Каждому контурному току приписываем определенное положительное направление, например, по часовой стрелке в каждом контуре. Таким образом, сила тока на любом участке равна силе контурного тока или разности (или сумме) сил двух контурных токов соседних простых контуров.

Затем для каждого простого контура с учетом знаков э.д.с. и сил токов **записываются уравнения**, следующие из **второго правила Кирхгофа**.

Введение контурных токов автоматически приводит к выполнению закона сохранения заряда и удалению первой системы уравнений Кирхгофа. Этот метод снижает число уравнений на столько уравнений, сколько независимых уравнений дает первое правило Кирхгофа. Всего остается вместо $N - 1 + M$ уравнений M независимых уравнений по числу простых контуров.

Метод узловых потенциалов

Другой метод уменьшения числа независимых уравнений системы – метод узловых потенциалов.

Метод узловых потенциалов – метод расчета электрических цепей путем записи системы линейных алгебраических уравнений, в которой за неизвестные принимаются потенциалы узлов цепи. Сущность метода заключается в том, что сначала определяются потенциалы всех узлов схемы, а затем токи и напряжений в неразветвленных участках цепи (ветвях), соединяющих узлы. Систему независимых уравнений для потенциалов узлов цепи можно получить, последовательно используя первое правило Кирхгофа и обобщенный закон Ома для ветвей, соединяющих узлы цепи.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из N узлов, соединенных ветвями цепи. Пронумеруем все узлы и потенциалы, которыми они обладают – φ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$). Пусть R_{ij} , J_{ij} и $U_{ij}^{ст}$ – сопротивление, сила тока и э.д.с. ветви, соединяющей i -ый и j -ый узлы цепи. Составим систему уравнений:

1. Для всех узлов электрической цепи, кроме одного (потенциал которого обычно выбирается равным нулю), запишем $N - 1$ уравнений для токов в соответствии с первым законом Кирхгофа (при этом учтем, что ток в отсутствующей ветви равен нулю):

$$\sum_{j \neq i}^N J_{ij} = 0.$$

2. Для всех ветвей электрической цепи в соответствии с обобщенным законом Ома запишем уравнения для токов:

$$J_{ij} R_{ij} = \varphi_i - \varphi_j + U_{ij}^{ст}.$$

3. В уравнения 1-ого закона Кирхгофа подставим токи из уравнений обобщенного закона Ома и преобразуют получившиеся уравнения относительно потенциалов узлов, введя в рассмотрение проводимости ветвей – G_{ij} :

$$\sum_{j \neq i}^N J_{ij} = \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{R_{ij}} (\varphi_i - \varphi_j + U_{ij}^{\text{CT}}) = 0,$$

$$\varphi_i \sum_{j \neq i}^N G_{ij} - \sum_{j \neq i}^N G_{ij} \varphi_j = - \sum_{j \neq i}^N G_{ij} U_{ij}^{\text{CT}}.$$

Как видим, систему уравнений для потенциалов можно составить и непосредственно. Для этого вначале выбирается один из узлов, потенциал которого считаем равным нулю. Затем нумеруются узлы, после чего записывается система из $N - 1$ уравнений. В левой части каждого из уравнений записывается потенциал заданного узла, умноженный на сумму проводимостей ветвей, примыкающих к нему, вычитается сумма потенциалов узлов, примыкающих к данному, умноженных на проводимости ветвей, соединяющих их с данным узлом. В правой части записывается сумма произведений э.д.с. на проводимость для всех ветвей, примыкающих к данному узлу, если э.д.с. направлена в сторону рассматриваемого узла, то она записывается со знаком «+», если от узла, то со знаком «-».

Из полученной системы $N - 1$ независимых уравнений (где N – число узлов цепи) определяются потенциалы узлов (равные напряжениям между каждым из узлов и базовым), а затем (по закону Ома) токи в ветвях и напряжения на элементах цепи. Если заданы напряжения между какими-либо парами узлов, то число независимых уравнений уменьшается.

В том случае, когда число узлов без единицы $N - 1$ меньше числа простых контуров M в цепи, данный метод является более экономным, чем метод контурных токов. Применение метода узловых потенциалов особенно эффективно для цепей, имеющих параллельные ветви (например, при наличии только двух узлов).

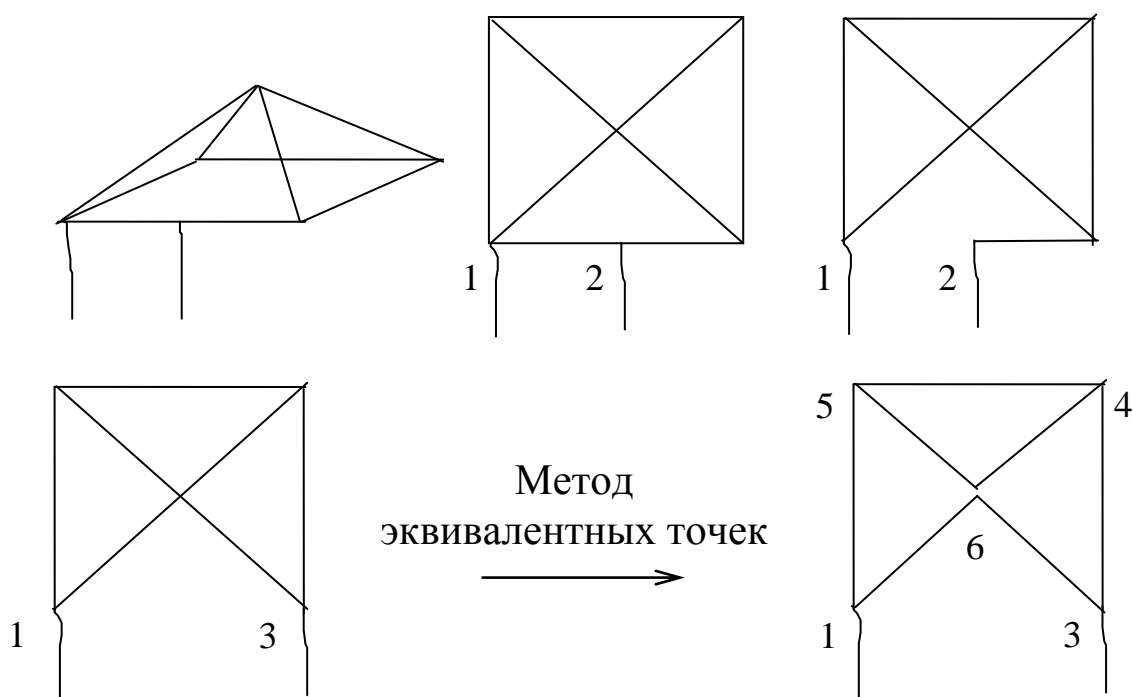
Методы контурных токов и узловых потенциалов не привносят ничего нового к правилам Кирхгофа и обобщенному закону Ома. Данные методы только задают алгоритм их использования, уменьшая общее число независимых уравнений.

Метод эквивалентных точек

Идея метода заключается в следующем. Если из каких-либо соображений (например, из соображений симметрии или в соответствии с условиями задачи) известно, что два или более узлов в разветвленной цепи одинакового потенциала, то их можно соединить между собой (рассматривать как единый узел).

Пример применения метода эквивалентных точек

Найти сопротивление системы одинаковых по химическому составу, длине и толщине проводников, изображенной на рис.



$$r_{163} = 2r, \quad r_{45} = \frac{1}{\frac{1}{2r} + \frac{1}{r}} = \frac{2}{3}r, \quad r_{3451} = r_{45} + 2r = \frac{8}{3}r,$$

$$r_{13} = \frac{1}{\frac{1}{r_{163}} + \frac{1}{r_{3451}}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}}r = \frac{8}{7}r, \quad r_{12} = \frac{1}{2}r + r_{13} = \frac{1}{2}r + \frac{8}{7}r = \frac{23}{14}r,$$

$$R = \frac{1}{\frac{2}{r} + \frac{1}{r_{12}}} = \frac{1}{\frac{2}{r} + \frac{14}{23r}} = \frac{23}{60}r.$$

Пример расчета разветвленной цепи

В электрической цепи, изображенной на рисунке, известно: $R_1, R_2, U_1^{CT}, U_2^{CT}, J_G = 0$. Найти U_{CT} .

Правила Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа:

$$J_{R_1} + J_{R_2} = J_G = 0,$$

$$J_{R_1} = -J_{R_2}.$$

Второе правило Кирхгофа:

$$J_{R_1} R_1 - J_{R_2} R_2 = U_1^{CT} - U_2^{CT},$$

$$J_{R_2} R_2 = U_2^{CT} - U_{CT}.$$

Решение системы уравнений:

$$J_{R_2} (R_1 + R_2) = U_2^{CT} - U_1^{CT},$$

$$J_{R_2} = \frac{U_2^{CT} - U_1^{CT}}{R_1 + R_2}, \quad U_{CT} = U_2^{CT} - R_2 \frac{U_2^{CT} - U_1^{CT}}{R_1 + R_2} = \frac{U_2^{CT} R_1 + U_1^{CT} R_2}{R_1 + R_2}.$$

Метод контурных токов.

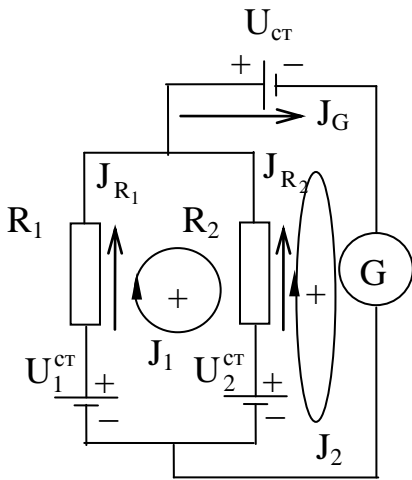
Для конкретного примера разветвленной цепи, изображенно-го на рисунке, получим:

$$J_1 R_1 + (J_1 - J_2) R_2 = U_1^{CT} - U_2^{CT},$$

$$(J_2 - J_1) R_2 = U_2^{CT} - U_{CT},$$

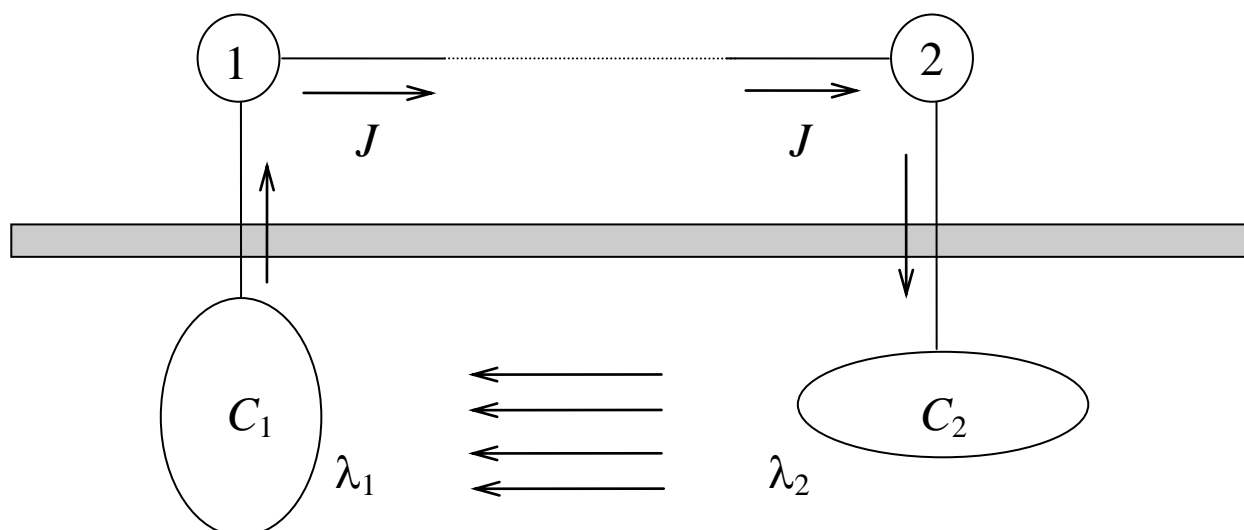
$$J_2 = J_G = 0, \quad J_1 R_1 + J_1 R_2 = U_1^{CT} - U_2^{CT}, \quad -J_1 R_2 = U_2^{CT} - U_{CT},$$

$$J_1 = \frac{U_1^{CT} - U_2^{CT}}{R_1 + R_2}, \quad U_{CT} = U_2^{CT} + R_2 \frac{U_1^{CT} - U_2^{CT}}{R_1 + R_2} = \frac{U_2^{CT} R_1 + U_1^{CT} R_2}{R_1 + R_2}.$$



Заземление в линиях связи

При сооружении телеграфных и телефонных линий прокладывают всего один провод. Связь между двумя станциями осуществляется проводом над Землей. Роль второго провода, замыкающего цепь, играет Земля (см. рис.). Рассмотрим задачу о сопротивлении заземления.



Вблизи каждого из заземленных электродов почву считаем однородной с удельными проводимостями λ_1 и λ_2 . Пусть электроды зарыты глубоко, так, что влиянием границы между землей и атмосферой на общий ток, текущий между электродами можно пренебречь. Пусть C_1 и C_2 – емкости электродов, какие они были бы, если бы эти электроды были уединены и находились в вакууме. Ток, стекающий с электрода, практически не зависит от свойств удаленных областей и определяется его потенциалом (относительно бесконечно удаленных точек, потенциал которых будем считать равным нулю) и удельной электропроводностью почвы около электрода. В этом случае можно записать:

$$J_1 = \frac{\varphi_1}{R_1} = \frac{\varphi_1 \lambda_1 C_1}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad \varphi_1 = \frac{\varepsilon_0}{\lambda_1 C_1} J_1.$$

Аналогично для другого, отрицательного, электрода:

$$J_2 = \frac{\varphi_2}{R_2} = \frac{\varphi_2 \lambda_2 C_2}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad \varphi_2 = \frac{\varepsilon_0}{\lambda_2 C_2} J_2.$$

Станции соединены проводом, по которому течет единый ток $J = J_1 = -J_2$. Используя это, можно получить:

$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{J} = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{\lambda_1 C_1} + \frac{1}{\lambda_2 C_2} \right).$$

Видно, что для получения хорошего заземления электроды должны быть больших размеров (чтобы увеличить свою уединенную емкость) и окружающая электроды почва должна обладать хорошей электропроводностью.

Заметим, что сопротивление заземления практически **не зависит от расстояния между пластинами** (после того, как их можно считать уже уединенными).

Если электроды в виде сфер, то:

$$C_{1,2} = 4\pi\varepsilon_0 R_{1,2},$$
$$R = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\lambda_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_2 R_2} \right).$$