

Материалы к Главе I

Характеристики элементарных частиц

(всего ~350, стабильные, квазистабильные – 10^{-20} с ÷ 15 мин, нестабильные – 10^{-22} ÷ 10^{-24} с)

Частица	Время жизни	Линейный размер, м	Масса покоя, кг	Заряд, e	Спин, \hbar	Магн. момент	Структура	Открыт
Электрон $e^- (e^+)$	$>2 \cdot 10^{22}$ лет	$<2.8 \cdot 10^{-15}$	$9.1 \cdot 10^{-31}$	-1 (+1)	1/2	$-1.00 \mu_B$	—	1897г., Джозеф Джон Томсон
Протон $p^+ (p^-)$	$>10^{31}$ лет	$\sim 1.4 \cdot 10^{-15}$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	+1 (-1)	1/2	$+2.79 \mu_n$	(2u, d)	1911г., Эрнест Резерфорд
Нейтрон n^0	~ 15 мин $n^0 = e^- + p^+ + \tilde{\nu}_e$	$\sim 1.5 \cdot 10^{-15}$	$1.68 \cdot 10^{-27}$	$<2 \cdot 10^{-22}$	1/2	$-1.91 \mu_n$	(u, 2d)	1932г., Джеймс Чедвик

Элементарный заряд – $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл ($S_e/e \leq 10^{-7}$).

Кварки – $q_u = +\frac{2}{3}e$, $q_d = -\frac{1}{3}e$.

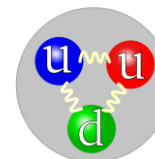
Постоянная Планка – $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Магнетон Бора – $\mu_B \equiv \frac{e}{2m_e} \hbar = 9.27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл.

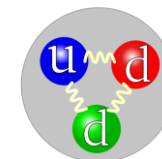
Ядерный магнетон – $\mu_n \equiv \frac{e}{2m_p} \hbar = 5.05 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл.

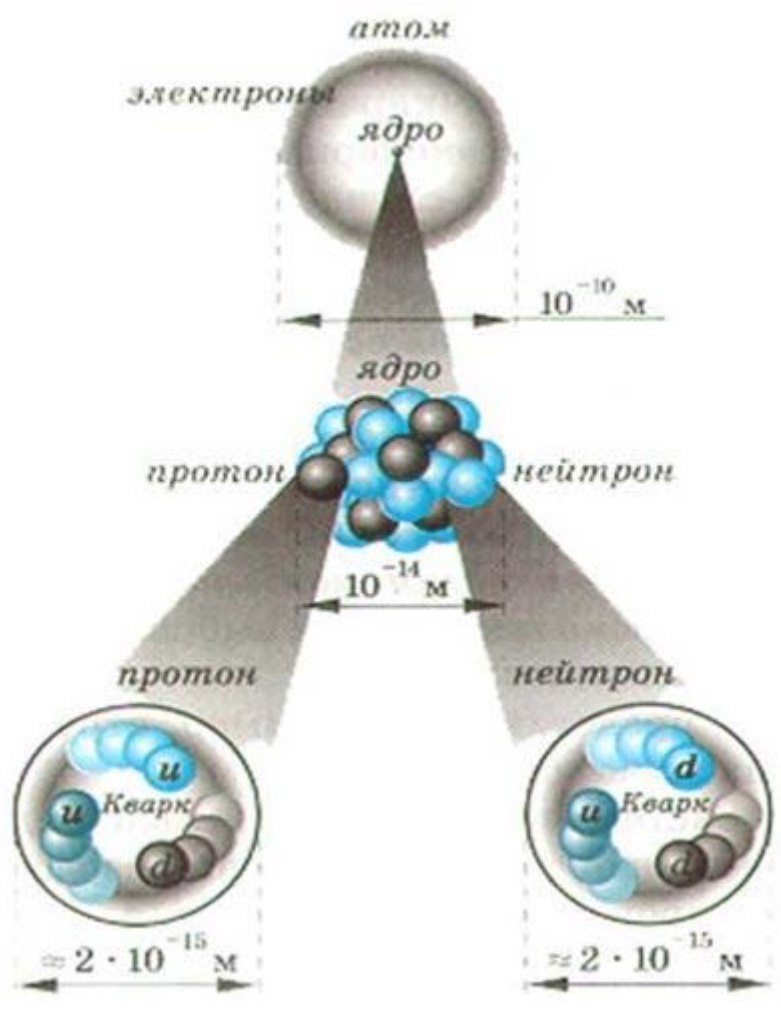
1957 г., Роберт Хофштадтер и др.

Протон



Нейтрон



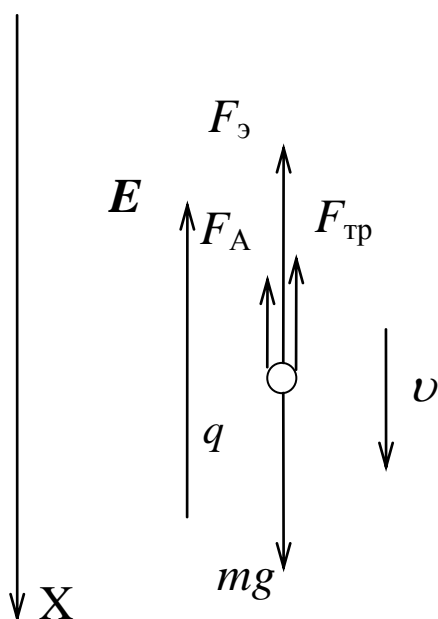


Методы определения заряда

А. Опыт Милликена

Крошечная капля масла, собирает небольшой заряд с ионов воздуха, либо при трении о стенки пульверизатора. Капля помещается в вертикальное электрическое поле. Сравняется равномерное (из-за наличия сил вязкого трения $F_{\text{тр}}$) движение маленьких шарообразных частиц во внешнем электрическом поле и без него. Зная напряженность поля E , можно посчитать заряд частиц. Со временем практически скачкообразно меняется скорость движения частиц из-за скачкообразного изменения заряда (при встрече с ионом воздуха или при облучении рентгеновскими лучами, выбивая электрон из самой капли). Величины изменения заряда оказываются кратны одной и той же величине – заряду электрона e .

Рисунок и формулы для опыта Милликена:



$$mg - F_A - Eq - F_{\text{тр}} = 0,$$

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta r v = a v,$$

где F_A – сила Архимеда, r – радиус капли, η – коэффициент вязкого трения;

$$Eq = mg - F_A - a v,$$

$$E \Delta q = -a \Delta v,$$

$$\Delta q = -\frac{a}{E} \Delta v.$$

Коэффициент a находится в опыте при выключенном поле:

$$mg - F_A = F_T = a v_0,$$

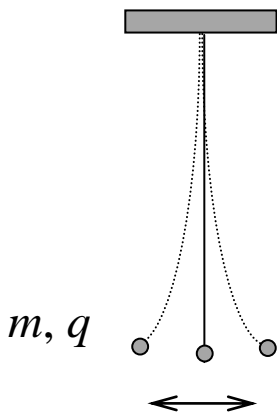
$$a = \frac{1}{v_0} (mg - F_A) = \frac{1}{v_0} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 g (\rho_K - \rho_B).$$

В результате выясняется, что **величина заряда всегда меняется на целое число элементарных зарядов и что не существует заряда меньше элементарного.**

Б. Резонансный метод

Более точный метод. Измерение амплитуды колебания заряженного шарика малой массы, укрепленного на тонком упругом стержне, в переменном электрическом поле. С помощью этого метода можно измерить заряд с точностью до десятых долей элементарного заряда.

Рисунок и формулы для резонансного метода:



$$m\ddot{x} = -kx, \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

$$E_0q = kx_0, \quad x_0 = \frac{E_0}{k}q = \frac{E_0}{m\omega_0^2}q,$$

$$X_0 = Qx_0 = Q\frac{E_0}{m\omega_0^2}q,$$

$$E(t) = E_0\cos\omega_0t$$

Q – добротность колебательной системы – число полных собственных колебаний, за которое амплитуда уменьшается в e -раз, умноженное на π .

Оценим возможности метода. Пусть $m = 1$ мг, $E_0 = 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}}$,

$$\omega_0 = 10^{-1} \text{ с}^{-1}, \quad q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}, \quad Q = 100. \quad \left(Q \equiv \frac{\pi}{g} = \pi N_e \right):$$

$$X_0(q = e) = Q\frac{E_0}{m\omega_0^2}q = \frac{100 \cdot 10^5 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{10^{-6} \cdot 10^{-2}} = 1.6 \cdot 10^{-4} = 0.16 \text{ мм}.$$

Метод Кавендиша

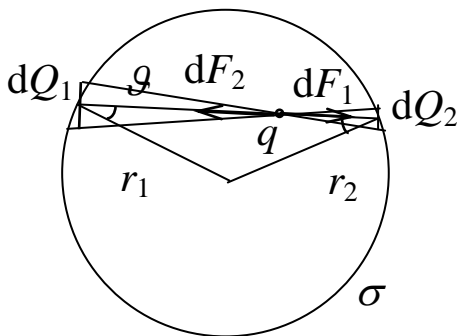
Зависимость величины силы взаимодействия точечных зарядов от расстояния была установлена в опытах английского физика Генри Кавендиша за 12 лет до открытия закона Кулона, в 1773 г. Результаты этих опытов были изложены в работе Г. Кавендиша, которую Джеймс Максвелл опубликовал через 106 лет – в 1879 г.

Задача экспериментальной проверки зависимости $\sim \frac{1}{r^2}$ состоит по существу в том, чтобы оценить величину α в формуле

$$F = \text{const} \frac{1}{r^{2+\alpha}}.$$

Если сферическая оболочка равномерно заряжена электричеством, то поле внутри оболочки определяется знаком величины α , в частности равно нулю, если справедлива зависимость $\sim \frac{1}{r^2}$.

Рассмотрим силы, действующие на заряд того же знака, находящегося внутри равномерно заряженной сферы с поверхностной плотностью σ (см. рис.):



$$dF_1 = k \frac{dQ_1 q}{r_1^{2+\alpha}}, \quad dF_2 = k \frac{dQ_2 q}{r_2^{2+\alpha}};$$

$$dQ_1 = \sigma dS_1 = \sigma \frac{dS_1'}{\cos \vartheta_1} = \sigma \frac{r_1^2 d\Omega}{\cos \vartheta_1},$$

$$dQ_2 = \sigma \frac{r_2^2 d\Omega}{\cos \vartheta_2};$$

$$dF_1 = k \frac{q\sigma}{\cos \vartheta_1 \cdot r_1^\alpha} d\Omega, \quad dF_2 = k \frac{q\sigma}{\cos \vartheta_2 \cdot r_2^\alpha} d\Omega,$$

но $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}$, следовательно:

$$dF_1 - dF_2 = k \frac{q\sigma}{\cos \mathcal{G}} d\Omega \left(\frac{1}{r_1^\alpha} - \frac{1}{r_2^\alpha} \right).$$

Как видим, если $\alpha = 0$, то силы, действующие со стороны зарядов, находящихся на поверхности равномерно заряженной сферы, будут скомпенсированы.

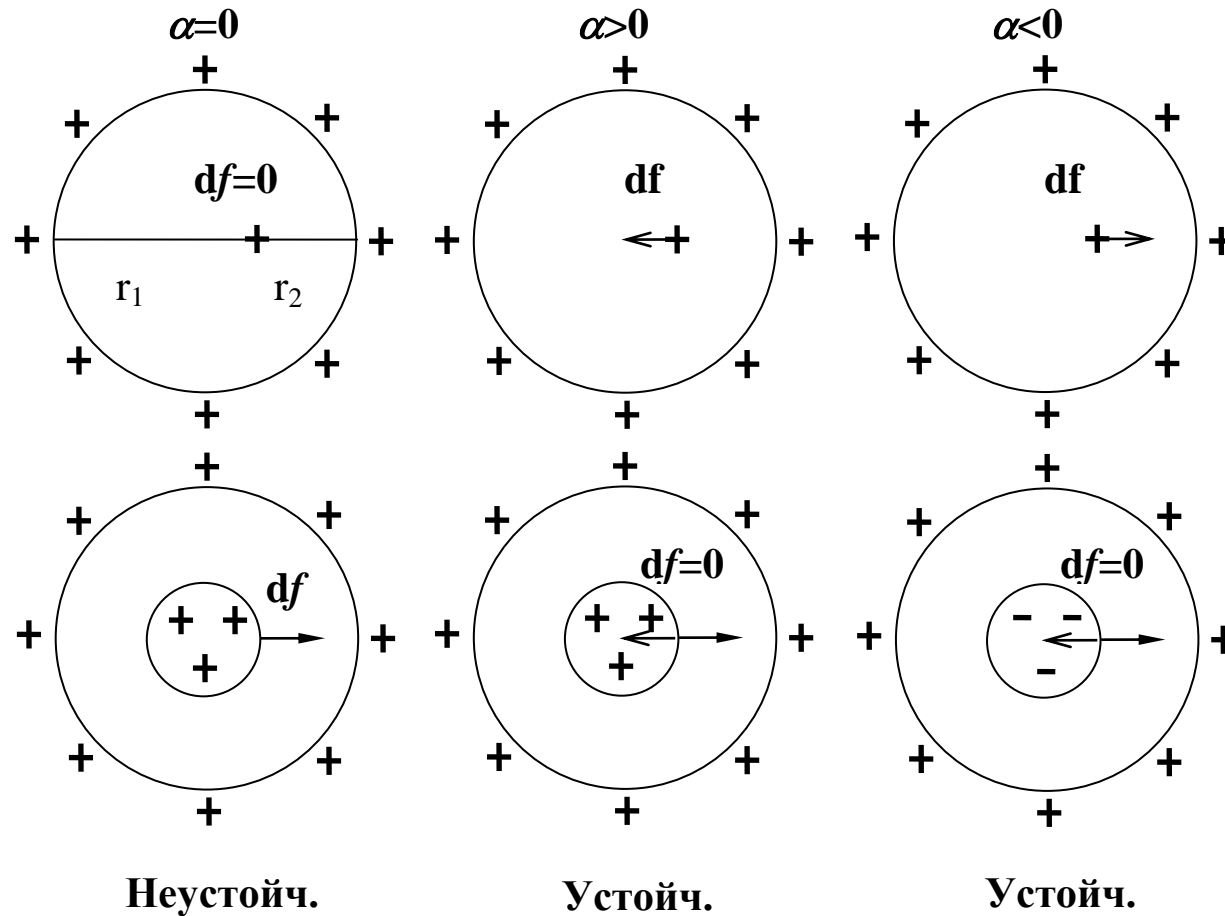
Метод Кавендиша состоит в измерении заряда в объеме заряженного шара и последующем вычислении значения α . К проводящему шару плотно прижимают разъемную проводящую сферическую оболочку. Всей системе шар + оболочка сообщается электрический заряд. Затем сферическая оболочка с помощью изолирующих ручек снимается с шара и исследуется оставшийся в шаре заряд.

Пусть $\alpha = 0$ и имеется заряд в объеме. Из соображений симметрии распределение зарядов будет сферически симметрично. Рассмотрим сферический слой заряда. Со стороны зарядов с внешней стороны слоя силы не действуют, а с внутренней стороны действуют силы, которые увлекут заряженный слой к поверхности. Следствие – **при равновесном распределении заряда внутри проводящего шара заряды отсутствуют.**

Если $\alpha \neq 0$, то **часть заряда сосредотачивается в объеме шара.** Причем, если $\alpha > 0$, то в шаре останется положительный заряд, если $\alpha < 0$, то – отрицательный.

Генри Кавендиш в 1773 г. получил, что $|\alpha| \leq 0,02$, Джеймс Максвелл в 1879 г. – $|\alpha| \leq 5 \cdot 10^{-5}$, современные данные с помощью усовершенствованного метода Кавендиша дали – $|\alpha| \leq 2,7 \cdot 10^{-16}$.

Иллюстрация к опыту Генри Кавендиша (1773 г.)



$$F = const \frac{1}{r^{2+\alpha}}$$

Генри Кавендиш:

$$|\alpha| \leq 0,02 \quad (1773 \text{ г.}),$$

Джеймс Максвелл:

$$|\alpha| \leq 5 \cdot 10^{-5} \quad (1879 \text{ г.}),$$

последние данные:

$$|\alpha| \leq 2,7 \cdot 10^{-16} \quad (1971 \text{ г.}).$$

$$df = dF_1 - dF_2 = const \cdot \left(\frac{1}{r_1^\alpha} - \frac{1}{r_2^\alpha} \right);$$

Электрический диполь и его поле

Электрический диполь (диполь) – совокупность двух равных по величине и противоположных по знаку точечных электрических зарядов, разнесенных в пространстве (расстояния между зарядами гораздо больше их линейных размеров) (см. рис. 1.24):

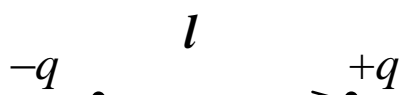


Рис. 1.24

По определению **электрический дипольный момент** – физическая величина, равная

$$\mathbf{p} \equiv q\mathbf{l}, \quad (1.50)$$

где \mathbf{l} – радиус-вектор положительного заряда относительно отрицательного

(см. рис. 1.24). Единица измерения – $[p] = \text{Кл} \cdot \text{м}$.

Точечный (элементарный) электрический диполь – диполь, размерами которого можно пренебречь. Эти размеры гораздо меньше расстояния от диполя до точек наблюдения (при расчете поля диполя) или характерных линейных размеров неоднородности электрического поля в месте расположения диполя (при расчете силы и момента сил, действующих на диполь во внешнем поле).

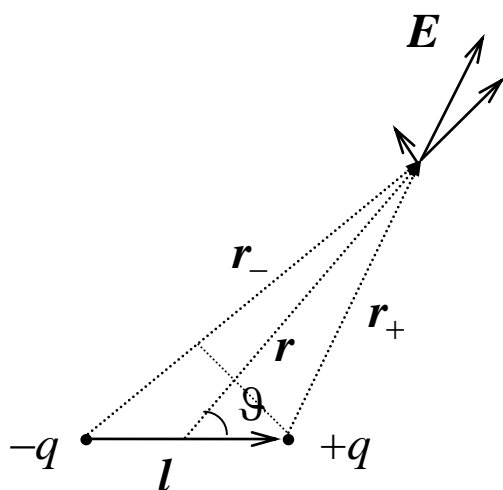


Рис. 1.25

Найдем характеристики электрического поля, создаваемого точечным диполем (см. рис. 1.25). В этом случае $l \ll r$, где r – расстояние от диполя до точки наблюдения. В соответствии с принципом суперпозиции электрических полей и выражением для потенциала точечного заряда, нормированного на бесконечности (см. п. 6.2), потенциал точечного диполя будет равен:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right).$$

Если $l \ll r_+, r_-$, то $r_+ \cong r_- \cong r$, $r_- - r_+ \cong l \cdot \cos \vartheta$. С учетом $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_+ + \mathbf{r}_-}{2}$ получим:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{l \cdot \cos \vartheta}{r^2} = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.51)$$

В свою очередь напряженность электрического поля, которая локально связана с его потенциалом (1.48), будет равна:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\nabla(\mathbf{p}\mathbf{r})r^3 - (\mathbf{p}\mathbf{r})3r^2\nabla r}{r^6}.$$

При этом учтем, что

$$\nabla(\mathbf{p}\mathbf{r}) = \nabla(p_x x + p_y y + p_z z) = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k} = \mathbf{p},$$

$$\begin{aligned} \nabla r &= \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{1}{2r} \nabla(x^2 + y^2 + z^2) = \\ &= \frac{1}{2r} (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned}$$

В результате получим формулу:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p}r^3 - (\mathbf{p}\mathbf{r})3r^2 \frac{\mathbf{r}}{r}}{r^6} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}}{r^5}. \quad (1.52)$$

Как видим на больших расстояниях от диполя потенциал и напряженность электрического поля спадают с увеличением расстояния быстрее ($\varphi \sim \frac{1}{r^2}$ и $E \sim \frac{1}{r^3}$), чем в случае точечного заряда ($\varphi \sim \frac{1}{r}$ и $E \sim \frac{1}{r^2}$).

В точках наблюдения, расположенных на направлении дипольного момента, когда радиус-вектор точки наблюдения \mathbf{r} коллинеарен дипольному моменту \mathbf{p} , напряженность поля направлена вдоль момента и равна (см. рис. 1.26):

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\mathbf{p}}{r^3}. \quad (1.53)$$

Если же точки наблюдения лежат на прямой, перпендикулярной дипольному моменту, то напряженность поля направлена противоположно дипольному моменту и на тех же расстояниях ровно вдвое меньше (рис. 1.26):

$$E_{\perp} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p}}{r^3}. \quad (1.54)$$

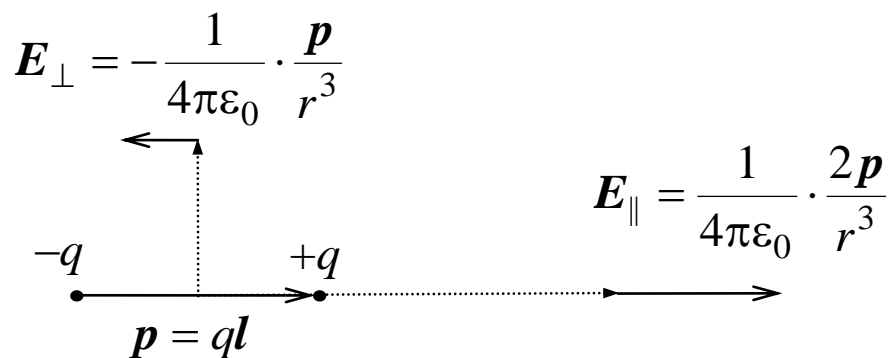
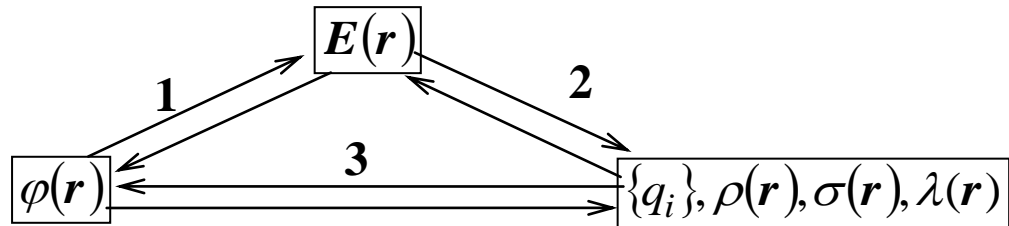


Рис. 1.26

Задачи электростатики. Уравнения Пуассона и Лапласа



1. Задачи $\varphi(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r})$.

1.1. Определение потенциала:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_r^{r_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \text{взятие интегралов.}$$

1.2. Локальная связь потенциала и напряженности поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}\varphi(\mathbf{r}) - \text{дифференцирование.}$$

2. Задачи $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \{q_i\}, \rho(\mathbf{r}), \sigma(\mathbf{r})$.

2.1. Закон Кулона + принцип суперпозиции:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dL' - \text{взятие} \end{aligned}$$

сумм и интегралов.

2.2. Электростатическая теорема Гаусса в интегральной форме (для задач с высокой симметрией):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} - \text{взятие интегралов.}$$

2.3. Электростатическая теорема Гаусса в дифференциальной форме и граничные условия для составляющих напряженности электрического поля:

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0.$$

Действие – дифференцирование и решение дифференциального уравнения с учетом граничных условий – значений напряженности поля на границе области интегрирования.

3. Задачи $\{q_i\}, \rho(\mathbf{r}), \sigma(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{r})$.

3.1. Закон Кулона + принцип суперпозиции:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\vec{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \\ + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dL' - \text{взятие сумм и интегралов.}$$

3.2. Уравнение Пуассона или Лапласа с граничными условиями для потенциала:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ или } \Delta \varphi = 0,$$

где $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – **оператор Лапласа;**

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0.$$

Действие – дифференцирование и решение дифференциального уравнения с учетом граничных условий – значений потенциала и его первых производных (проекций напряженности электрического поля) на границе области интегрирования.

Общая задача электростатики, которая имеет **единственное решение: найти $\varphi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, зная распределение заряда, и решая уравнение Пуассона (Лапласа) с учетом граничных условий.**

Решение $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x, y, z)$ удовлетворяет условиям:

- 1) функция $\varphi(x, y, z)$ конечна, непрерывна и дифференцируема;
- 2) первые производные по координатам конечны.

Вариант задачи электростатики: найти характеристики поля, если известны форма и взаимное расположение всех проводников, полные заряды всех проводников (или потенциалы всех проводников, или полные заряды некоторых и потенциалы всех остальных проводников), а также объемная плотность зарядов вне проводников.

Эта задача также имеет единственное решение.