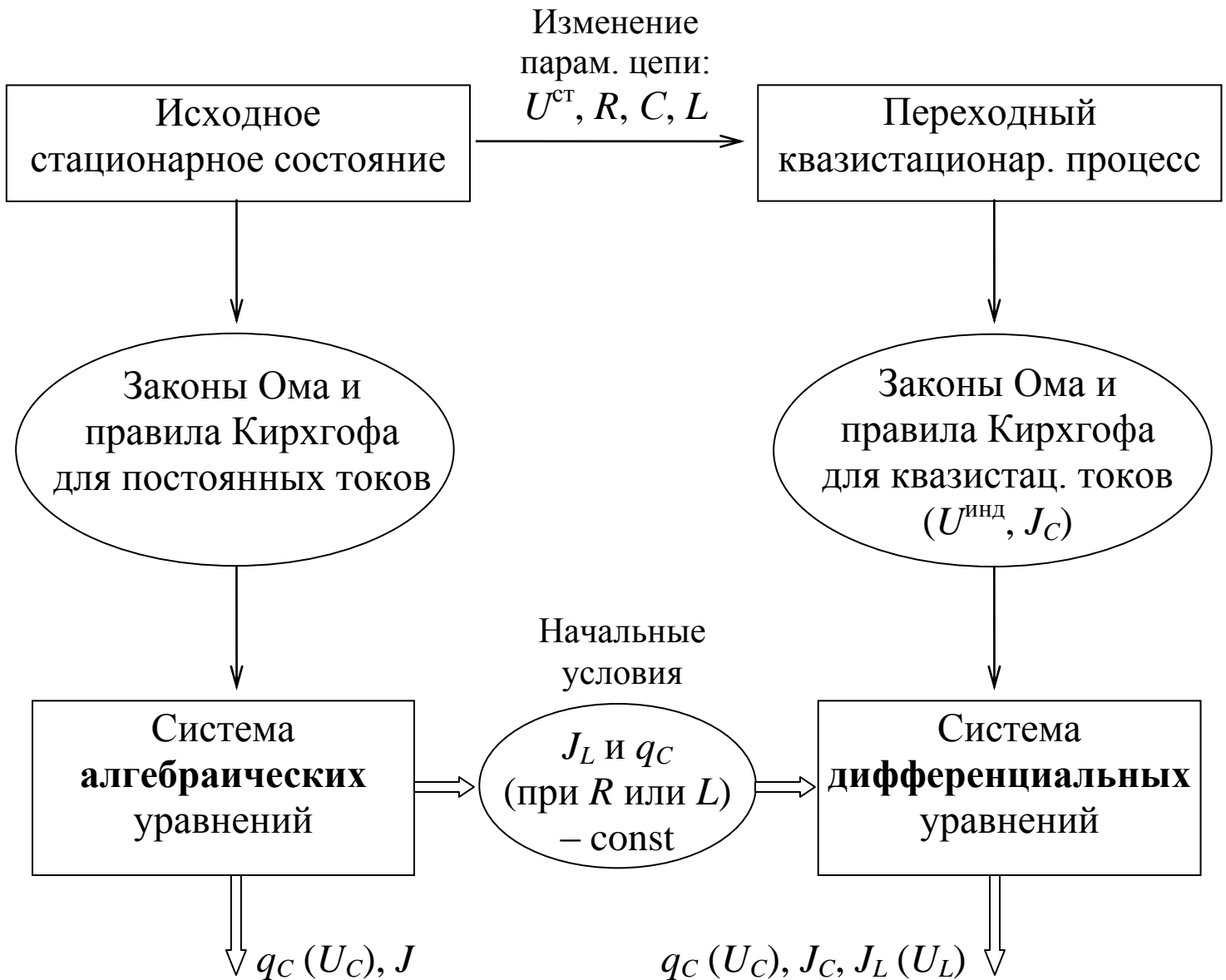


Материалы к Главе VII

Переходные процессы в электрических цепях

Переходный процесс в электрической цепи – переход из одного стационарного состояния цепи в другое, который происходит при изменении параметров электрической цепи ($U^{ст}$, R , C , L).

Стационарное состояние – состояние, в котором не меняются во времени физические величины (q_C , J), определяющие это состояние при фиксированных параметрах цепи.

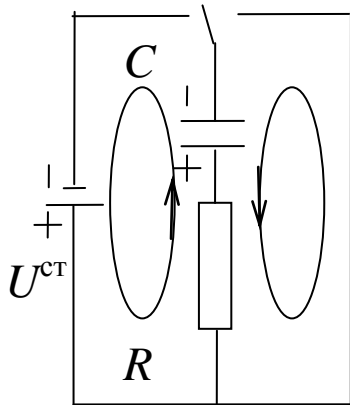


Основное отличие при квазистационарном процессе – появление в уравнениях э.д.с. индукции $U^{инд}$ на участках цепей, содержащих индуктивности, и токов J_C на участках цепей, содержащих конденсаторы.

Полезное утверждение – без скачков J_L и q_R (при R или L).

RC-цепь

Зарядка конденсатора. В соответствии со вторым правилом Кирхгофа для контура в левой части схемы после подключения э.д.с.:



$$RJ + U_C = U^{ct}.$$

Здесь J и U_C – мгновенные значения тока в цепи и падения напряжения на конденсаторе (рис.), которое согласовано с направлением обхода контура. Но

$$U_C = \frac{q}{C} \text{ и } J = \frac{dq}{dt},$$

где q – заряд на нижней обкладке конденсатора.

Исключая U_C и J , получим:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U^{ct}.$$

Сделаем замену переменных $q = Q + q'$ и выберем $q' = CU^{ct}$:

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} + \frac{q'}{C} = U^{ct},$$

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0, \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}, \quad Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Используя начальное условие $q(0) = 0$, $Q(0) = Q_0 = -CU^{ct}$, окончательно получим (см. рис.):

$$Q = -CU^{ct} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad q(t) = CU^{ct} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right),$$

$$J(t) = \frac{dq(t)}{dt} = CU^{ct} \left(\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \right) = \frac{U^{ct}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

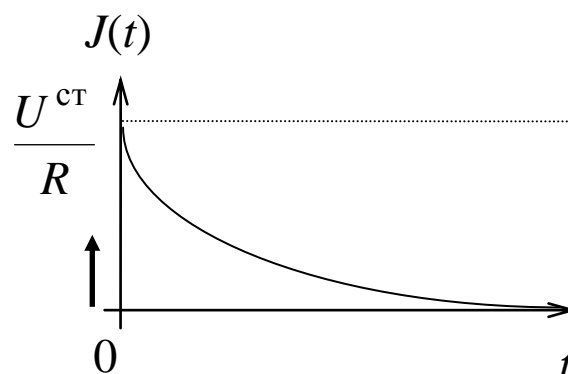
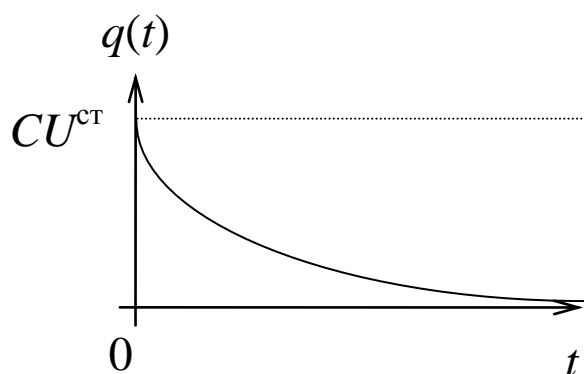
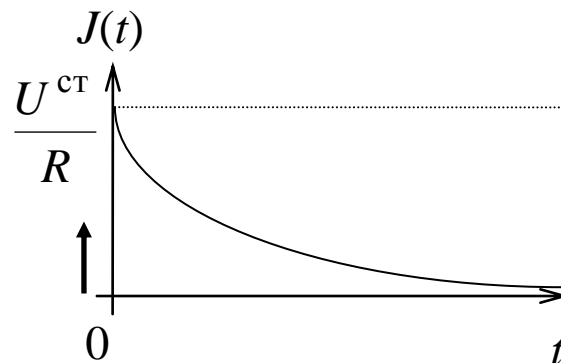
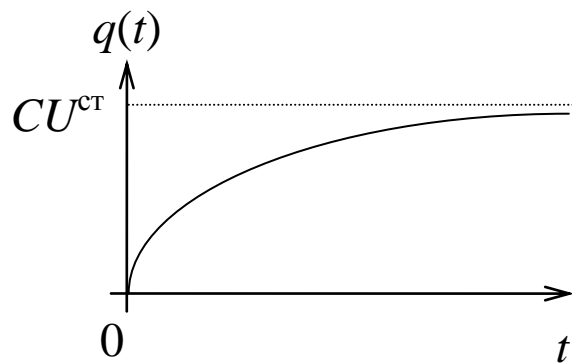
Разрядка конденсатора. В соответствии со вторым правилом Кирхгофа и выбором направления обхода для контура в правой части схемы после замыкания цепи можно записать (рис.):

$$RJ - U_C = 0,$$

$$U_C = \frac{q}{C}, \quad J = -\frac{dq}{dt}, \quad -R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0, \quad \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}.$$

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} = CU^{ct} e^{-\frac{t}{RC}},$$

$$J(t) = \frac{U^{\text{ст}}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$



Как видим, процесс зарядки и разрядки конденсатора происходит не мгновенно, а с конечной скоростью. Ток разрядки конденсатора выделяет джоулево тепло в сопротивлении. При этом расходуется энергия электрического поля, запасенная в конденсаторе.

В отличие от заряда на обкладках конденсатора ничто не мешает силе тока, сразу после включения и выключения источника, возрасти с нуля до конечной величины.

Для рассмотренного контура характерное **время зарядки и разрядки** равно $\tau = RC$.

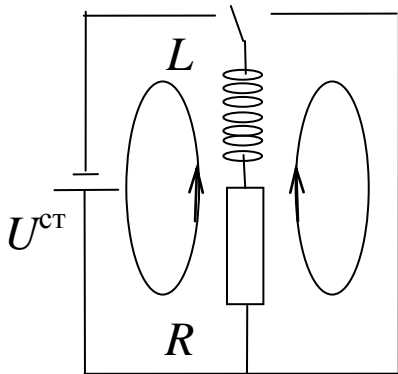
Например, если $C = 1$ мкФ, $R = 10$ кОм, то $\tau = 10^{-2}$ с $\gg \tau_{\text{М}}, \tau_{\text{макс}}$.

Если при уменьшении C и R условие $\tau \gg \tau_{\text{макс}}$ будет нарушено, то решение задачи надо рассматривать как процесс распространения электромагнитного возмущения (волны) вдоль контура.

RL-цепь

Процессы в цепи, содержащей индуктивность и сопротивление, при подключении и отключении ее от источника э.д.с (см. рис.). Впервые эти процессы рассмотрел немецкий естествоиспытатель Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц в 1855 г.

Подключение источника. В соответствии со вторым правилом Кирхгофа и выбором направления обхода контура в левой части схемы (рис.):



$$RJ = U^{\text{ct}} + U^{\text{инд}},$$

где э.д.с. индукции на участке контура с индуктивностью L (катушка индуктивности) равна:

$$U^{\text{инд}} = -L \frac{dJ}{dt}.$$

Исключая из уравнения э.д.с. индукции, получим:

$$RJ = U^{\text{ct}} - L \frac{dJ}{dt}, \quad J = I + I' \quad (I' = \text{const}),$$

$$RI + RI' = U^{\text{ct}} - L \frac{dI}{dt}, \quad I' = \frac{U^{\text{ct}}}{R}, \quad RI = -L \frac{dI}{dt}, \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt,$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad J(0) = 0, \quad I_0 = -\frac{U^{\text{ct}}}{R}, \quad J(t) = \frac{U^{\text{ct}}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

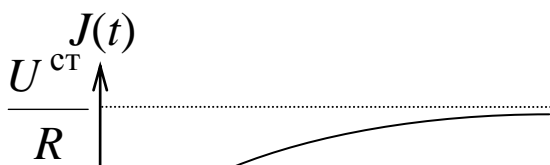
$$U^{\text{инд}} = -L \frac{dJ}{dt} = -L \frac{U^{\text{ct}}}{R} \cdot \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = -U^{\text{ct}} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

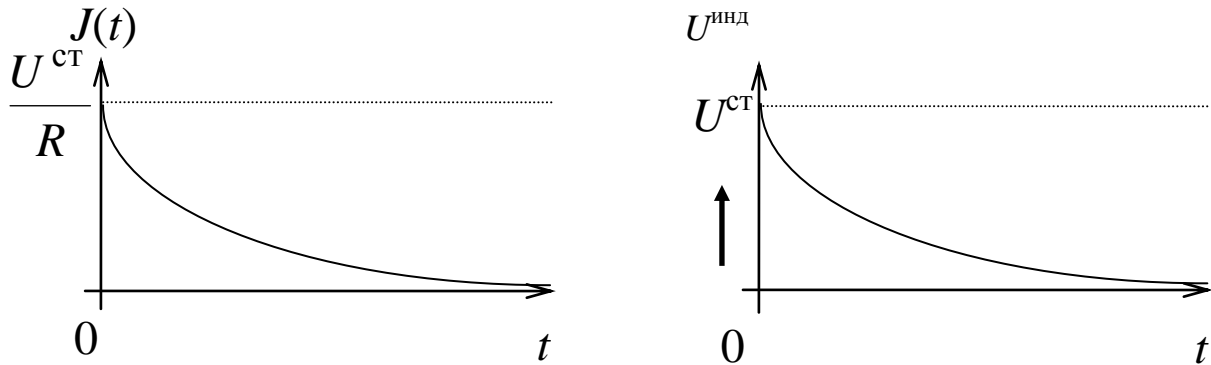
Отключение источника. В соответствии со вторым правилом Кирхгофа и выбором направления обхода контура в правой части схемы (рис.):

$$RJ = U^{\text{инд}}, \quad RJ = -L \frac{dJ}{dt}, \quad J(t) = J_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Используя начальное значение силы тока $J(0) = J_0 = \frac{U^{\text{ct}}}{R}$, получим:

$$J(t) = \frac{U^{\text{ct}}}{R} e^{-\frac{R}{L}t}, \quad U^{\text{инд}} = U^{\text{ct}} e^{-\frac{R}{L}t}.$$





Как видим, процесс нарастания и убывания силы тока происходит не мгновенно, а с конечной скоростью. После выключения э.д.с. ток выделяет джоулево тепло в сопротивлении. При этом расходуется энергия магнитного поля, запасенная в индуктивности.

В отличие от силы тока, текущего через катушку индуктивности, ничто не мешает э.д.с. индукции сразу после включения и выключения источника с нуля возрасти до конечной величины.

Для рассмотренного контура характерное время установления тока в цепи равно $\tau = L/R$.

Например, если $L = 10$ Гн, $R = 1$ кОм, то $\tau = 10^{-2}$ с $\gg \tau_M, \tau_{max}$.

Если при уменьшении L и увеличении R условие $\tau \gg \tau_{max}$ будет нарушено, то решение задачи надо рассматривать как процесс распространения электромагнитной волны вдоль контура.

Гармонические колебания. Формула Томсона. Энергия колебательного контура с током

Положим сначала, что сопротивлением контура можно пренебречь $R = 0$, тогда коэффициент затухания равен нулю – $\delta = 0$ и уравнение колебательного контура приобретает вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Полученное уравнение называется **уравнением гармонических колебаний**. Решением этого уравнения будет комплексная функция:

$$z(t) = re^{\pm i\omega_0 t} = r(\cos \omega_0 t \pm i \cdot \sin \omega_0 t).$$

При этом действительными решениями уравнения будут вещественная и мнимая ее части:

$$x_1(t) = r \cos \omega_0 t \text{ и } x_2(t) = r \sin \omega_0 t.$$

Напомним, что любая линейная комбинация решений линейного однородного дифференциального уравнения также будет его решением. Следовательно, общее решение гармонических колебаний запишется в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t = \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \cos \omega_0 t + \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \sin \omega_0 t \right), \end{aligned}$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где постоянные величины – **амплитуда A** и **начальная фаза φ** определяются начальными условиями и $(\omega_0 t + \varphi)$ – **фаза**. Общее решение этого уравнения есть незатухающее гармоническое колебание с **частотой собственных гармонических колебаний** электрического

контура $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, определяемой только параметрами самого контура.

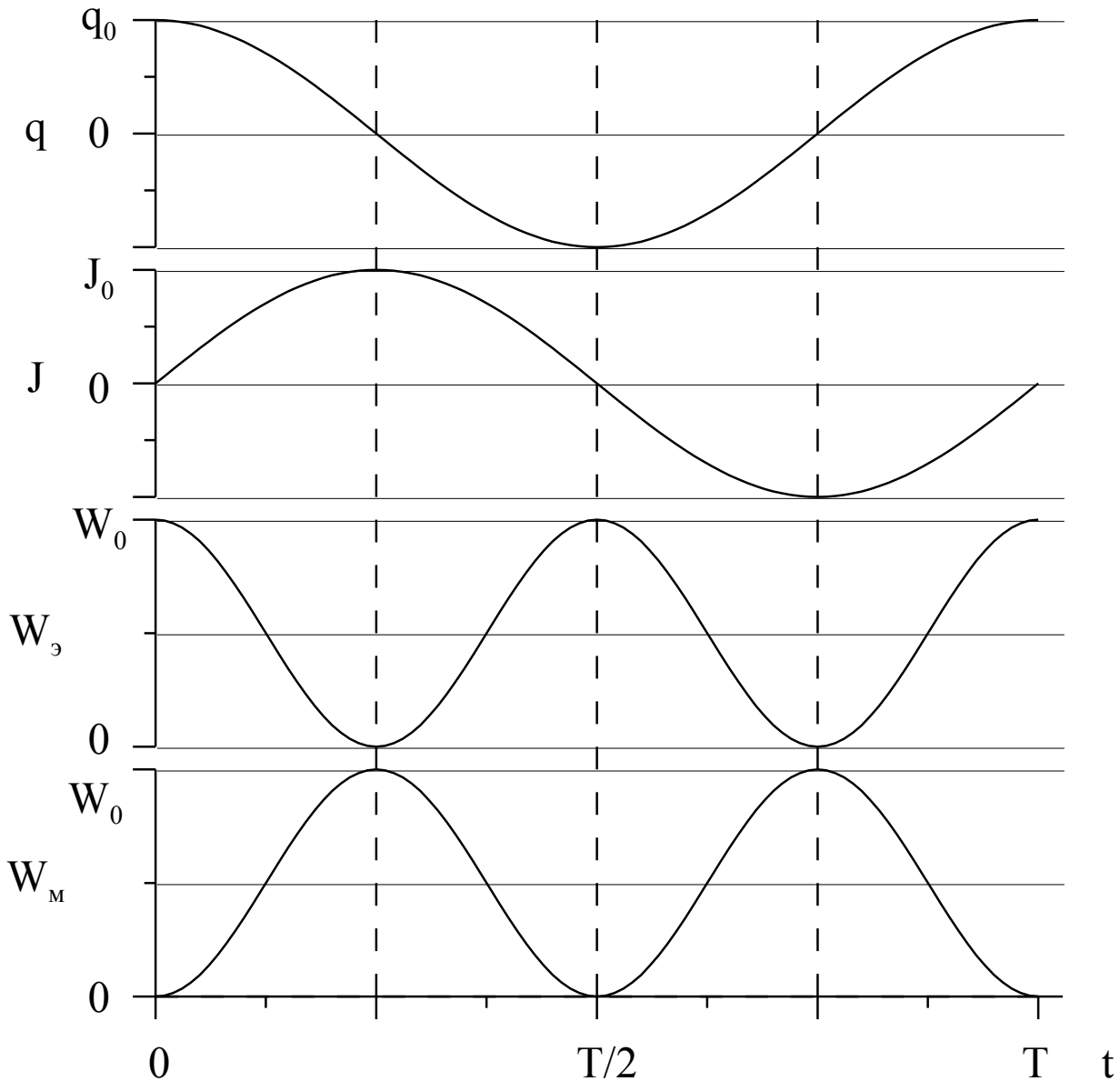
При этом период гармонических колебаний равен:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Эта формула для периода собственных гармонических колебаний называется **формулой Томсона**, которую впервые получил английский физик Уильям Томсон (лорд Кельвин) в 1853 г.

Если $x(t) = q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ – заряд на обкладках конденсатора, то сила тока в контуре будет равна (при $\varphi = 0$ см. рис.):

$$J(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$



Найдем теперь временную зависимость энергии электрического поля W_q , запасенной в конденсаторе C , и энергии магнитного поля W_J , запасенной в индуктивности L (см. рис.):

$$W_q(t) = \frac{q^2(t)}{2C} = \frac{A^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = W_0 \frac{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)}{2},$$

$$W_J(t) = \frac{LJ^2(t)}{2} = \frac{LA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = W_0 \frac{1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)}{2}.$$

Здесь $W_0 = \frac{LA^2\omega_0^2}{2} = \frac{A^2}{2C}$.

При этом вся запасенная в колебательном контуре энергия W не меняется со временем:

$$W(t) = W_q(t) + W_J(t) = W_0 = \frac{A^2}{2C} = \frac{LA^2\omega_0^2}{2} - const.$$

Затухающие колебания

Рассмотрим теперь контур, сопротивление которого не равно нулю. Конкретный вид решения **уравнения затухающих колебаний**:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

зависит от соотношения между коэффициентом затухания δ и частотой собственных гармонических колебаний ω_0 :

$$z(t) = re^{-\delta t \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t}.$$

1. Случай слабых затуханий.

Логарифмический декремент затухания и добротность контура

При слабых затуханиях коэффициент затухания меньше частоты собственных гармонических колебаний в колебательном контуре — $\delta < \omega_0$, что реализуется при

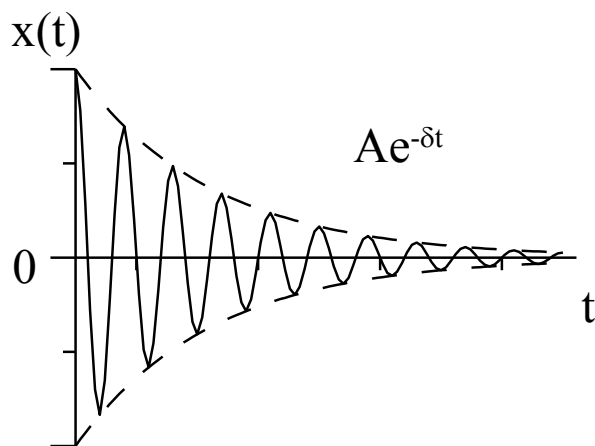
$$\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

В этом случае комплексное решение уравнения собственных колебаний примет вид:

$$\begin{aligned} z(t) &= re^{-\delta t \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} = re^{-\delta t \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t} = re^{-\delta t \pm i\omega t} = \\ &= re^{-\delta t} (\cos \omega t \pm i \sin \omega t). \end{aligned}$$

Следовательно, общее действительное решение уравнения затухающих колебаний будет (см. рис.):

$$x(t) = e^{-\delta t} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$



где **частота затухающих колебаний** $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ зависит от электрических параметров контура, а **начальные амплитуда A и фаза φ** — от начальных условий.

Закон изменения величин q , J и U_C со временем не является периоди-

чески, однако, эти величины периодически проходят через ноль и бесконечное число раз достигают максимума и минимума (см. рис.). Колебательный процесс можно представить себе как гармоническое колебание с частотой затухающих колебаний ω и экспоненциально уменьшающейся амплитудой затухающих колебаний $A(t) = Ae^{-\delta t}$.

Удвоенное время между двумя последовательными прохождениями величиной через ноль называется периодом затухающих колебаний T . При этом он оказывается больше периода собственных гармонических колебаний электрического контура $T > T_0$, а частота затухающих колебаний – меньше частоты собственных колебаний $\omega < \omega_0$.

Время $\tau \equiv 1/\delta$, в течение которого амплитуда уменьшается в $e \cong 2.71$ раз, называется **временем затухания (или временем релаксации)**.

Натуральный логарифм отношения значений амплитуды через период затухающих колебаний называется логарифмическим декрементом (декрементом) затухания \mathfrak{D} :

$$\mathfrak{D} \equiv \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta(t+T)}} = \delta T.$$

Если τ – время затухания, а N_e – **число полных колебаний (периодов затухающих колебаний)**, за которое амплитуда уменьшается в $e \cong 2.71$ раз, то:

$$\mathfrak{D} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau/T} = \frac{1}{N_e} = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cong \pi \frac{R}{L} \sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Для характеристики затухания при описании резонансных явлений часто используют другую величину – **добротность колебательного контура Q** .

Добротность (колебательного) контура Q – физическая величина, равная числу полных колебаний, за которое амплитуда уменьшается в e раз, умноженному на π :

$$Q \equiv \pi N_e = \frac{\pi}{\mathfrak{D}} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega}{2\delta} \cong \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Заметим, что есть и другое, тождественное введенному, определение добротности. Поскольку энергия электрического поля W_q квадратично зависит от заряда $q(t)$ на обкладках конденсатора, а

энергия магнитного поля W_J – от силы тока $J(t)$ в цепи индуктивности средняя энергия колебательного контура с током $\langle W \rangle_T$ за период T меняется со временем по экспоненциальному закону:

$$\langle W \rangle_T = \langle W_q \rangle_T + \langle W_J \rangle_T = W_0 e^{-2\delta t}.$$

При этом **средняя мощность потерь** $\langle P \rangle_T$ равна:

$$\langle P \rangle_T \equiv - \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle_T = - \frac{d\langle W \rangle_T}{dt} = 2\delta W_0 e^{-2\delta t}.$$

Добротность колебательного контура Q – физическая величина, равная отношению энергии, запасенной в контуре, к энергии потерь за период колебаний, и умноженной на 2π :

$$Q \equiv 2\pi \frac{\langle W \rangle_T}{\langle P \rangle_T T} = 2\pi \frac{W_0 e^{-2\delta t}}{2\delta W_0 e^{-2\delta t} T} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi}{\vartheta} = \frac{\omega}{2\delta}.$$

Легко видеть, что если амплитуда затухающих колебаний заряда на конденсаторе и тока в цепи убывает экспоненциально с характерным временем затухания τ , то полная электромагнитная энергия $W(t)$, запасенная в контуре, убывает экспоненциально вдвое быстрее с характерным временем, равным половине времени затухания – $\tau/2$.

2. Случай сильных затуханий

При сильных затуханиях коэффициент затухания больше или равен частоте собственных гармонических колебаний в колебательном контуре – $\delta \geq \omega_0$, что реализуется при

$$R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

В этом случае решение уравнения собственных колебаний принимает вид:

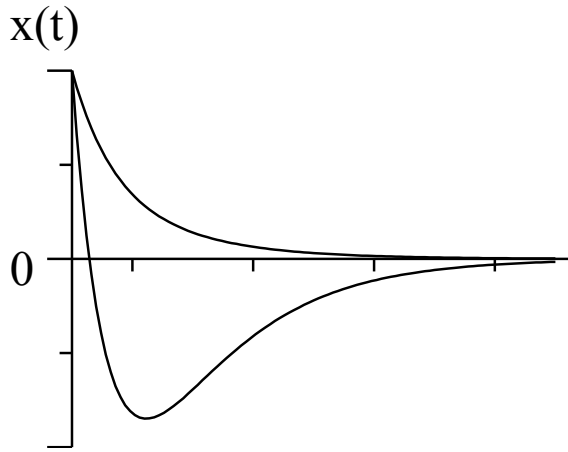
$$z(t) = r e^{-\delta t \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t},$$

а общее действительное решение уравнения затухающих колебаний будет:

$$x(t) = A e^{-\delta t + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\delta t - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} = e^{-\delta t} \left(A e^{+\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right),$$

где постоянные величины A и B зависят от начальных условий.

Как видим, при сильном затухании никаких колебаний в колебательном контуре не будет. Процесс будет **апериодическим** с экспоненциальным по времени убыванием величин q, J, U_C, U_L, U_R (см. рис.).



Для того чтобы возникли колебания (хотя бы затухающие) в электрическом колебательном контуре, необходимо, чтобы $\delta < \omega_0$, т.е. при

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Резонанс.

Резонансная кривая, ее амплитуда и ширина

Исследуем частный случай вынужденных колебаний – колебания под действием гармонической вынуждающей силы $X(t) = X_0 \cos(\omega t)$ с частотой ω :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = X_0 \cos(\omega t).$$

А. Решение уравнения вынужденных колебаний

Найдем сначала частное решение $z(t)$ уравнения вынужденных колебаний с соответствующей комплексной вынуждающей силой $Z(t) = X_0 e^{i\omega t}$ (при этом $X(t) = \operatorname{Re}(Z(t))$):

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = X_0 e^{i\omega t}.$$

А затем, взяв от этого решения вещественную часть $x(t) = \operatorname{Re}(z(t))$, получим решение интересующего нас уравнения.

Будем искать решение в виде $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$:

$$-\omega^2 z_0 e^{i\omega t} + 2i\omega\delta z_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2 z_0 e^{i\omega t} = X_0 e^{i\omega t},$$

$$-\omega^2 z_0 + 2i\omega\delta z_0 + \omega_0^2 z_0 = X_0,$$

$$z_0 = x_0 e^{i\varphi} = x_0 (\cos \varphi + i \sin \varphi) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\delta} = X_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\delta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2} = \\ &= \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\delta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}}. \end{aligned}$$

Из сравнения левой и правой частей равенства получаем:

$$x_0(\omega) = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}},$$

$$\cos \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}}, \quad \sin \varphi(\omega) = \frac{-2\omega\delta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = -\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Итак, комплексным решением уравнения вынужденных колебаний под действием комплексной гармонической силы $Z(t) = X_0 e^{i\omega t}$ будет:

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t} = x_0 e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

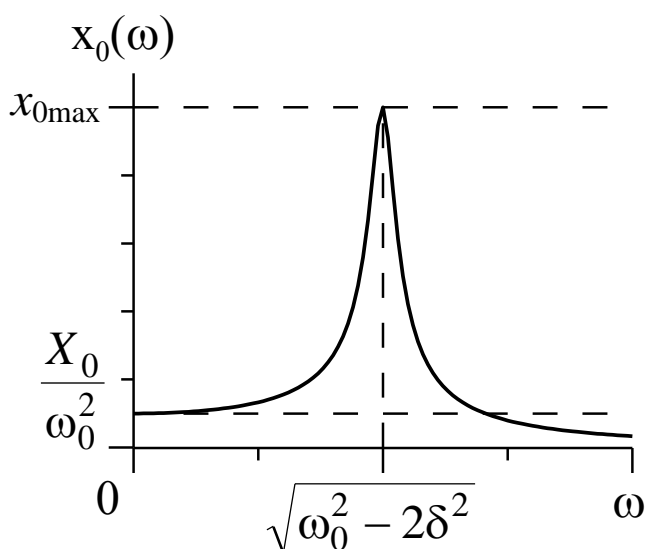
При этом решением уравнения вынужденных колебаний под действием действительной гармонической силы $X(t) = X_0 \cos(\omega t)$ –

$$x(t) = \text{Re}(z(t)) = x_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Как видим, физическая величина $x \in q, J, U_C, U_L$ так же, как и вынуждающая сила (U^{CT} – э.д.с. в колебательном контуре) меняются со временем по гармоническому закону с частотой вынуждающей силы ω .

Б. Резонансная кривая, ее амплитуда и ширина

Исследуем сначала поведение амплитуды вынужденных колебаний x_0 с изменением частоты вынуждающей силы (см. рис.). Напомним, что в данном случае речь идет об амплитуде изменения со временем заряда конденсатора $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi) = q(t)$, а вынуждающая сила – деленная на индуктивность э.д.с. в колебательном контуре – $X(t) = X_0 \cos \omega t = \frac{1}{L} U^{\text{CT}}(t)$.



При $\omega \rightarrow \infty$ $x_0 \rightarrow 0$ как $\frac{1}{\omega^2}$. При

постоянной вынуждающей силе ($\omega = 0$) смещение равно

$$x_0(0) = \frac{X_0}{\omega_0^2},$$

или для заряда

$$q_0(0) = \frac{X_0}{\omega_0^2} = \frac{LC}{L} U_0^{\text{CT}} = CU_0^{\text{CT}}.$$

При увеличении частоты вынуждающей силы наблюдается явление резонанса (см. рис.).

Резонанс – это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний физической величины при изменении частоты вынуждающей силы. Частота, при которой наблюдается это возрастание, называется **резонансной частотой**. Сама зависимость ампли-

туды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы называется **резонансной кривой**.

Найдем резонансную частоту для заряда q и напряжения U_C на обкладках конденсатора (при $X_0 \neq f(\omega)$):

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \delta^2 \right) = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\omega \delta^2 = 0,$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) = 2\delta^2, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2,$$

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \underset{\delta \ll \omega_0}{\cong} \omega_0.$$

Заметим, что частоты, при которых наступает резонанс тока J (скорости изменения заряда) и напряжения на индуктивности U_L (ускорения изменения заряда), не совпадают с резонансной частотой для заряда q и напряжения U_C на конденсаторе

$$\left(\omega_p^J = \omega_0, \quad \omega_p^{U_L} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} \right) \text{ в рассматриваемом контуре.}$$

При резонансе амплитуда колебаний будет равна:

$$x_0^{\max} = x_0(\omega_p) = \frac{X_0}{\sqrt{4\delta^4 + 4(\omega_0^2 - 2\delta^2)\delta^2}} = \frac{X_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \underset{\delta \ll \omega_0}{\cong} \frac{X_0}{2\delta\omega_0}.$$

Найдем отношение максимальной амплитуды к статическому отклонению:

$$\frac{x_0^{\max}}{x_0(0)} \cong \frac{X_0}{2\delta\omega_0} \cdot \frac{\omega_0^2}{X_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \cong \frac{2\pi}{T2\delta} = \frac{\pi}{\vartheta} = Q,$$

$$x_0^{\max} \cong Qx_0(0).$$

Таким образом, введенная нами ранее характеристика колебательного контура – **добротность** примерно (с точностью до $\delta \ll \omega_0$) равна отношению максимального значения амплитуды к статическому отклонению.

Найдем другую важную характеристику резонансной кривой в том же приближении – ее ширину. По определению **ширина резонансной кривой** $\Delta\omega$ – это величина, равная разности частот, при которых энергия колебаний в контуре уменьшается вдвое, а значит амплитуда колебаний – в $\sqrt{2}$ раз:

$$\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1,$$

где ω_1 и ω_2 – решения уравнения:

$$\frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}} = \frac{x_0^{\max}}{\sqrt{2}} \cong \frac{X_0}{\sqrt{2} \cdot 2\delta\omega_0}.$$

В приближении малых затуханий $\delta \ll \omega_0$ имеем:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2 &\cong 8\omega_0^2\delta^2, & (\omega_0^2 - \omega^2)^2 &\cong 4\omega_0^2\delta^2, & \omega_0^2 - \omega^2 &= \pm 2\omega_0\delta, \\ (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) &= \pm 2\omega_0\delta, & (\omega_0 - \omega)2\omega_0 &\cong \pm 2\omega_0\delta, & \omega &\cong \omega_0 \mp \delta, \\ \Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 &\cong 2\delta, & \frac{\Delta\omega}{\omega_0} &\cong \frac{2\delta}{\omega_0} & \cong \frac{1}{Q}. \end{aligned}$$

Как видим, чем выше добротность осциллятора Q (меньше коэффициент затухания δ), тем уже резонансная кривая. При этом:

$$x_0^{\max} \Delta\omega \cong x_0(0)\omega_0 = \frac{X_0}{\omega_0} - \text{const}(Q).$$

В. Разность фаз и мощность э.д.с. при резонансе

Рассмотрим теперь разность фаз φ между гармонически меняющимися со временем при вынужденных колебаниях координатой $x(t)$ (зарядом $q(t)$) и вынуждающей силой $X(t)$ (сторонней э.д.с $U^{\text{ст}}(t)$).

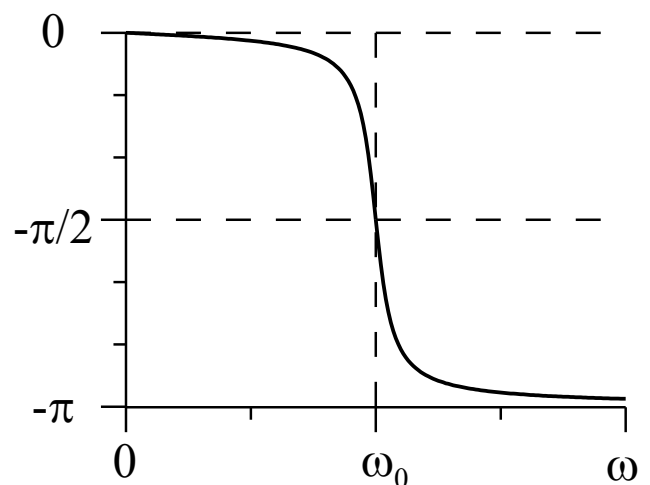
Проанализируем одновременно обе функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ (см. п. А).

При $\omega \rightarrow 0$: $\cos\varphi \rightarrow +1$ и $\sin\varphi \rightarrow -0$, а значит $\varphi \rightarrow -0$.

При $\omega \rightarrow \infty$: $\cos\varphi \rightarrow -1$ и $\sin\varphi \rightarrow -0$, а значит $\varphi \rightarrow -\pi$.

При резонансе: $\omega \rightarrow \omega_0$, $\cos\varphi \rightarrow +0$ и $\sin\varphi \rightarrow -1$, а значит $\varphi \rightarrow -\pi/2$.

В результате имеем монотонно убывающую зависимость разности фаз от времени $\varphi(t)$, изображенную на рис.



Найдем среднюю за период T мощность, которую затрачивает в цепи сторонняя э.д.с.:

$$\begin{aligned} \langle P(t) \rangle &= \langle U^{\text{CT}}(t)J(t) \rangle = \left\langle LX(t) \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle = -LX_0x_0\omega \langle \cos(\omega t)\sin(\omega t + \varphi) \rangle = \\ &= -LX_0x_0\omega \frac{\langle \sin(2\omega t + \varphi) \rangle + \sin(\varphi)}{2} = \frac{U_0^{\text{CT}}J_0}{2} \sin(-\varphi). \end{aligned}$$

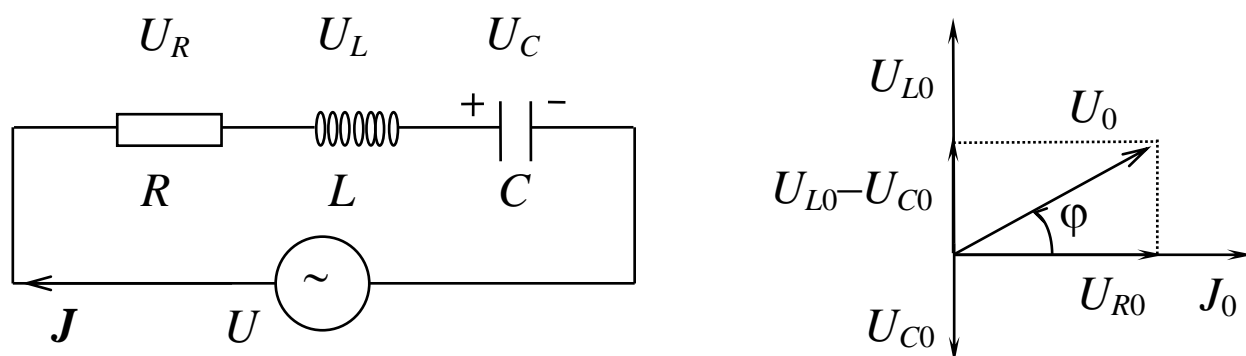
Теперь хорошо видно, что мощность, затрачиваемая источником в цепи, положительна и максимальна как раз в области резонанса – при той частоте сторонней э.д.с., при которой достигается максимум амплитуды скорости изменения заряда – тока в цепи.

Вынужденные колебания в колебательном контуре под действием негармонической силы (не гармонически меняющегося во времени э.д.с.) можно исследовать, если воспользоваться математической теоремой французского математика и физика Жана Батиста Жозефа Фурье. Согласно этой теореме всякая периодическая функция достаточно общего вида может быть разложена в ряд Фурье, т.е. может быть представлена в виде ряда гармонических функций. Применение теоремы Фурье к задаче о вынужденных колебаниях проводится по следующей схеме. Если внешняя сила, действующая на колебательный контур, периодична, то ее следует разложить в ряд Фурье и решать задачу о вынужденных колебаниях для каждого члена этого ряда в отдельности. Тогда сумма таких решений и даст решение задачи о вынужденных колебаниях под действием данной периодической силы.

Если внешняя сила, действующая на колебательный контур, не периодична, то аналогичным образом следует воспользоваться интегралом Фурье.

Резонанс напряжений

Рассмотрим участок цепи, состоящий из последовательно соединенных резистора с (омическим) сопротивлением R , катушки индуктивности с индуктивностью L и конденсатора с емкостью C . На концы участка подадим напряжение U с частотой ω . В цепи возникнет переменный ток J той же частоты, амплитуда и фаза которого определяются параметрами контура – R , L и C .



В соответствии с векторной диаграммой:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{R0}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

$$|Z| = \frac{U_0}{J_0} = \frac{\sqrt{U_{R0}^2 + (U_{L0} - U_{C0})^2}}{J_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Применим метод комплексных амплитуд (символьный метод):

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = X + iY,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad |Z| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

где $X = R$ – активное сопротивление цепи и $Y = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ – реактивное сопротивление цепи, а $\varphi = \varphi_U - \varphi_J$ – фаза, на которую напряжение опережает силу тока в рассматриваемой цепи.

Найдем частоту ω_p , при которой будет наблюдаться резонанс тока J_0 и напряжения U_{R0} на сопротивлении R в рассматриваемой цепи. Как легко видеть из формулы для модуля импеданса, максимальное значение амплитуды силы тока и напряжения на сопротивлении в данной цепи будет наблюдаться при частоте ω_p , при которой реактивное сопротивление всей цепи равно нулю:

$$Y = \omega_p L - \frac{1}{\omega_p C} = 0,$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0,$$

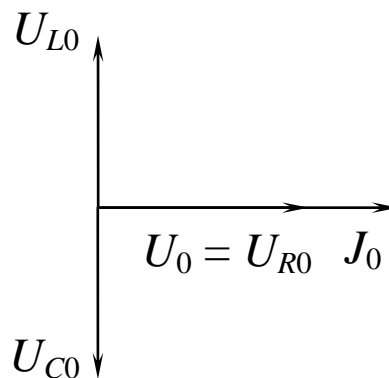
где ω_0 – частота собственных гармонических колебаний в электрической цепи в отсутствие сопротивления.

При этом сила тока будет максимальной и равна: $J_0^{\max} = \frac{U_0}{R}$.

Амплитуда напряжения на индуктивности U_{L0} равна амплитуде напряжения на емкости U_{C0} , которые меняются в противофазе (см. рис.):

$$U_{L0} = \omega_p L J_0^{\max} = \omega_p L \frac{U_0}{R} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{U_0}{R},$$

$$U_{C0} = \frac{1}{\omega_p C} J_0^{\max} = \frac{1}{\omega_p C} \frac{U_0}{R} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{U_0}{R}.$$



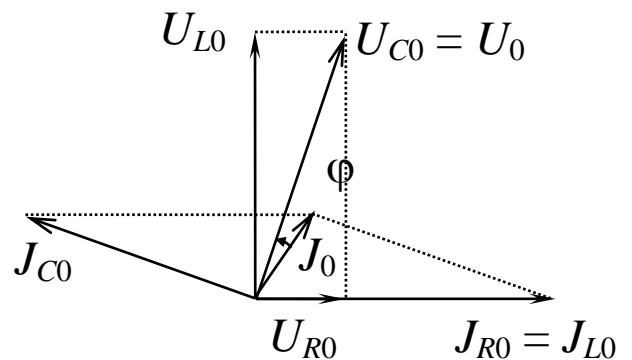
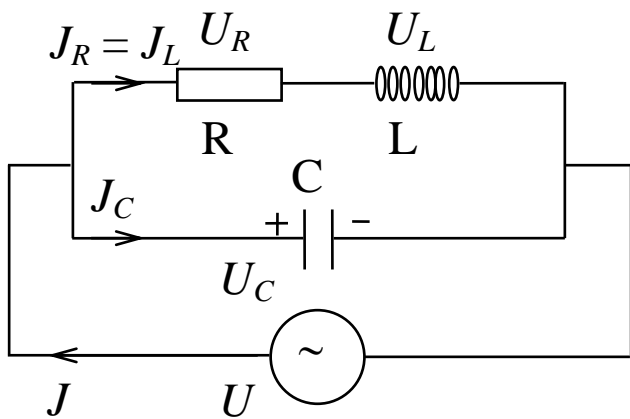
При малых значениях сопротивления $R < \sqrt{\frac{L}{C}}$ амплитуда напряжений на конденсаторе и индуктивности может существенно превышать амплитуду э.д.с. источника тока. Такой резонанс называется **резонансом напряжений**.

Разность фаз между силой тока и напряжением в резонансе будет равна нулю, поскольку:

$$\operatorname{tg} \varphi_p = \frac{\omega_p L - \frac{1}{\omega_p C}}{R} = 0.$$

Резонанс токов

Рассмотрим теперь участок цепи, состоящий из параллельно соединенных конденсатора с емкостью C и катушки индуктивности с индуктивностью L и сопротивление R , поскольку катушка индуктивности, имея, как правило, большое число витков, обладает заметным сопротивлением. На концы участка подадим напряжение U с частотой ω . В цепи возникнет переменный ток J той же частоты, амплитуда и фаза которого определяются параметрами контура – R , L и C . Построим векторную диаграмму токов и напряжений для этого участка (см. рис.).



В соответствии с законом Ома в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \hat{j} &= \frac{1}{Z} \hat{U} = \left(\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R + Z_L} \right) \hat{U} = \left(i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L} \right) \hat{U} = \left(i\omega C + \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) \hat{U} = \\ &= \frac{i\omega C(R^2 + \omega^2 L^2) + R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \hat{U} = \frac{R + i(\omega C(R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} \hat{U}. \end{aligned}$$

Рассмотрим колебания в цепи при частоте ω_p , когда нет реактивного сопротивления, т.е. при

$$\omega_p C(R^2 + \omega_p^2 L^2) - \omega_p L = 0,$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}.$$

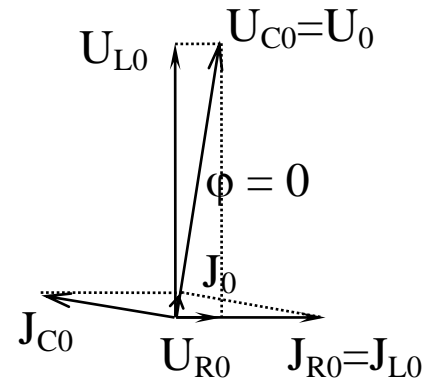
Обычно сопротивление в рассматриваемых цепях достаточно мало:

$$R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$$

и

$$\omega_p \cong \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0.$$

При такой резонансной частоте амплитуда токов, текущих через сопротивление с индуктивностью $J_{R0} = J_{L0}$ и конденсатор J_{C0} будет существенно больше амплитуды общего тока в цепи (см. рис.). Действительно:



$$J_{L0} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega_p^2 L^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right) L^2}} \cong \sqrt{\frac{C}{L}} U_0,$$

$$J_{C0} = \omega_p C U_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} C U_0 \cong \sqrt{\frac{C}{L}} U_0,$$

$$J_0 = \frac{R}{R^2 + \omega_p^2 L^2} U_0 = \frac{R}{R^2 + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right) L^2} U_0 = \frac{CR}{L} U_0 \ll \sqrt{\frac{C}{L}} U_0 \cong J_{L,C0}.$$

При этом токи, текущие через сопротивление с индуктивностью $J_R(t) = J_L(t)$ и конденсатор $J_C(t)$ меняются со временем практически в противофазе (см. рис.). Такой резонанс называется **резонансом токов**.

При стремлении сопротивления катушки индуктивности к нулю $R \rightarrow 0$ активное сопротивление всей цепи X стремится к бесконечности:

$$X = \frac{L}{CR} \rightarrow \infty.$$

Толщина скин-слоя

Рассмотрим **нормальный скин-эффект**: глубина скин-эффекта δ велика по сравнению с эффективной длиной свободного пробега зарядов (в металле – электронов) $l_{св}$. Это означает, что по всей глубине скин-эффекта можно воспользоваться законом Ома – $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$.

Будем исходить из теоремы о циркуляции напряженности магнитного поля и закона Ома:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}.$$

Пусть проводник является **изотропным и однородным** магнетиком – $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$:

$$\text{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu} = \lambda \mathbf{E}, \quad \text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mu \lambda \mathbf{E}.$$

Продифференцируем обе части уравнения по времени и воспользуемся законом электромагнитной индукции Фарадея – $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{B} = \text{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot}(\text{rot} \mathbf{E}) = \mu_0 \mu \lambda \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

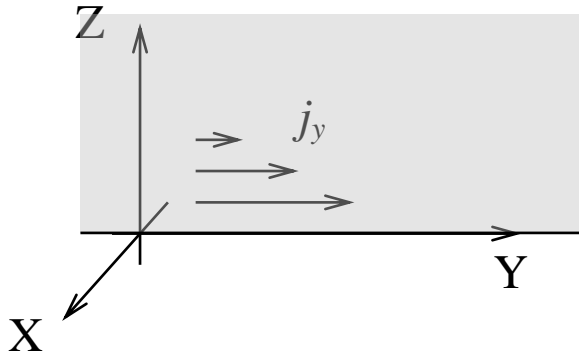
Поскольку $[\nabla[\nabla \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$ или $\text{rot}(\text{rot} \mathbf{a}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$, то с учетом теоремы Гаусса $\text{div} \mathbf{D} = \rho$ в отсутствие плотности свободных зарядов $\rho = 0$ внутри однородного и изотропного проводника ($\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$) получим:

$$\text{div} \mathbf{E} = \text{div} \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \text{div} \mathbf{D} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho = 0,$$

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{E}) = -\text{grad}(\text{div} \mathbf{E}) + \Delta \mathbf{E} = \mu_0 \mu \lambda \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \mu \lambda \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{или} \quad \Delta \mathbf{j} = \mu_0 \mu \lambda \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}.$$

Найдем решение полученного уравнения для напряженности электрического поля (а значит и плотности тока) в проводнике в частном случае изотропного однородного бесконечного проводника, занимающего полупространство с $z > 0$, по которому течет ток вдоль оси Y (см. рис.).



В данном случае $j_y = j_y(t, z)$, $j_x = j_z = 0$, $E_y = E_y(t, z)$, $E_x = E_z = 0$ и

$$\frac{\partial^2 E_y(t, z)}{\partial z^2} = \mu_0 \mu \lambda \frac{\partial E_y(t, z)}{\partial t}.$$

Для токов, меняющихся по гармоническому закону, решение будем искать в виде $\hat{E}_y(t, z) = \hat{E}_{y0}(z)e^{i\omega t}$.

После подстановки в уравнение и сокращения обеих частей уравнения на общий гармонический множитель получим уравнение для комплексной амплитуды напряженности электрического поля:

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_{y0}(z)}{\partial z^2} = i\omega \mu_0 \mu \lambda \hat{E}_{y0}(z).$$

Решение этого уравнения ищем в виде $\hat{E}_{y0}(z) = Ae^{\hat{k}z}$. Тогда:

$$\hat{k}^2 \hat{E}_{y0}(z) = i\omega \mu_0 \mu \lambda \hat{E}_{y0}(z), \quad \hat{k} = \pm \sqrt{i\omega \mu_0 \mu \lambda} = \pm(1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu \lambda}{2}} \equiv \pm(\alpha + i\alpha).$$

При $z \rightarrow \infty$ решение со знаком "+" неограниченно возрастает, поскольку $\alpha = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu \lambda}{2}} > 0$, поэтому остается только одно решение:

$$\hat{E}_{y0}(z) = Ae^{-(\alpha+i\alpha)z}.$$

Таким образом, напряженность электрического поля в проводнике будет равна:

$$\hat{E}_y(t, z) = Ae^{-(\alpha+i\alpha)z} e^{i\omega t} = A e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \alpha z)}.$$

Или в вещественной форме:

$$E_y(t, z) = A e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \alpha z).$$

Воспользовавшись граничными условиями для напряженности поля на поверхности проводника $E_y(0,0) = E_0$, окончательно получим:

$$E_y(t, z) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \alpha z),$$

В соответствии с законом Ома для плотности тока:

$$j_y(t, z) = \lambda E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \alpha z) = j_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \alpha z).$$

Плотность тока (и напряженность электрического поля) максимальна на поверхности проводника и вглубь проводника экспоненциально убывает. На глубине $\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \mu \lambda}}$, которая носит название

толщина (глубина) скин-слоя, плотность тока и напряженность электрического поля в e – раз меньше, чем на поверхности. Толщина скин-слоя существенно зависит от проводимости λ и частоты электромагнитного поля ω .

Оценка толщины скин-слоя для хорошего металлического проводника в парамагнитном состоянии – $\lambda = 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $\mu \cong 1$:

$$\text{при } \nu = 5 \cdot 10^{14} \text{ Гц} - \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \mu \lambda}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{14} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} 10^7}} \cong 7.1 \text{ нм},$$

$$\text{при } \nu = 10^6 \text{ Гц} - \delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} 10^7}} \cong 0.16 \text{ мм},$$

$$\text{при } \nu = 50 \text{ Гц} - \delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 50 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} 10^7}} \cong 2.3 \text{ см}.$$

Скин-эффект приводит к увеличению сопротивления проводника, поскольку эффективная площадь поперечного сечения проводника, по которому течет ток, уменьшается.

При наличии сильного скин-эффекта ток существует практически только в поверхностном слое, и магнитного поля внутри проводника нет в соответствии с теоремой о циркуляции напряженности магнитного поля. Магнитная энергия становится меньше на величину энергии поля внутри проводника, а, следовательно (поскольку $W = \frac{1}{2} LJ^2$), индуктивность проводника уменьшается.

В технике быстропеременных токов скин-эффект учитывается тем, что электрические линии для них собирают из полых труб.

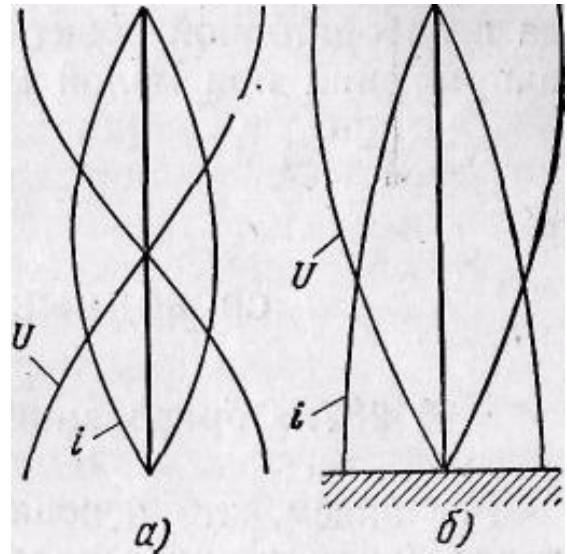
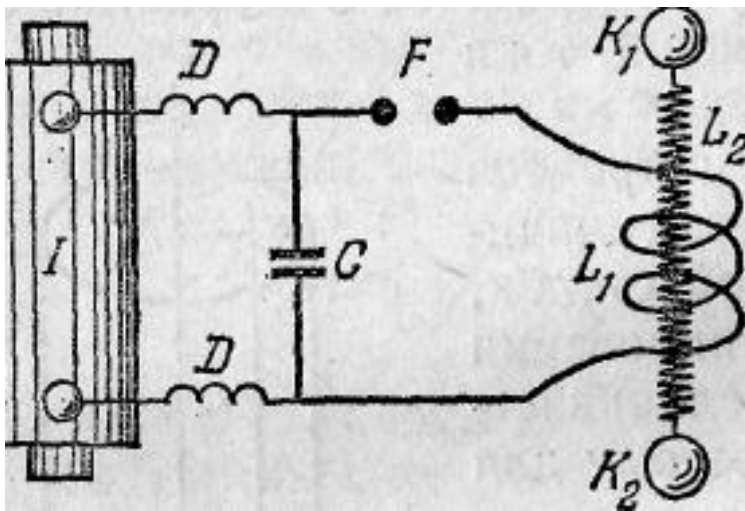
В современной радиотехнике поверхность проводника покрывают хорошо проводящим тонким слоем серебра.

Скин-эффект используется также в промышленности для закалки тонкого поверхностного слоя проводника.

Генератор Тесла – высокочастотный резонансный трансформатор

Генератор изобрел в 1891 г. сербский ученый в области электро- и радиотехники Никола Тесла.

Генератор (повышающий трансформатор) Тесла состоит из первичного колебательного контура и индуктивно связанного с ним вторичного контура, настроенного в резонанс с первичным контуром (см. рис.).



Схематическое изображение генератора Тесла ($L_2 \gg L_1$; $C_2 \ll C_1$), где
D – дроссели, I – индуктор,
F – искровой промежуток.

Основные колебания незаземленного (а) и заземленного (б) вибратора

$$W_M = \frac{1}{2} L J^2: \quad L_2 \gg L_1 \rightarrow J_{20} \ll J_{10}.$$

$$W_{\text{Э}} = \frac{1}{2} C U^2: \quad C_2 \ll C_1 \rightarrow U_{20} \gg U_{10}.$$

$$\omega_{\text{рез}} \sim 10^7 \div 10^8 \text{ Гц}, \quad U_{20} > 10^6 \text{ В}.$$

$$E_{\text{проб}} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}.$$