Методы расчета коэффициентов индукции

1. В соответствии с определением через магнитный поток:

$$L_{ij} = \frac{\Phi_{ij}}{J_j}, \; L = \frac{\Phi}{J}.$$

2. Через векторный потенциал:

$$L_{ij} = \frac{1}{J_j} \oint\limits_{\mathrm{L}_i} \boldsymbol{A}_{ij} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{l}_i \,,$$

$$L_{ij} = \frac{1}{J_i J_j} \int\limits_{\mathrm{V}_i} \boldsymbol{A}_{ij} \cdot \boldsymbol{j}_i \mathrm{d}V_i \,,$$

$$L = \frac{1}{J^2} \int\limits_{\mathrm{V}} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j} \mathrm{d}V \,.$$

3. Через линейные и объемные плотности токов:

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{\mathrm{L}_i} \oint\limits_{\mathrm{L}_j} \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{l}_j \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{l}_i}{r_{ij}},$$

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{J_i J_j} \int\limits_{\mathrm{V}_i} \int\limits_{\mathrm{V}_j} \frac{\boldsymbol{j}_j \cdot \boldsymbol{j}_i}{r_{ij}} \mathrm{d}V_j \mathrm{d}V_i \,,$$

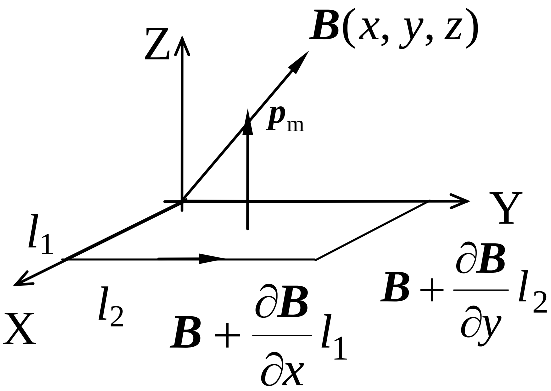
$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{J^2} \int\limits_{\mathrm{V}} \int\limits_{\mathrm{V}} \frac{\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j}'}{r'} \mathrm{d}V \mathrm{d}V'.$$

4. Через энергию магнитного поля:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} L_{ij} J_i J_j \,, \; W = \frac{1}{2} L J^2.$$

Элементарный ток в неоднородном магнитном поле

Пусть элементарный ток (малый плоский виток с линейным постоянным током) в виде прямоугольной рамки $l_1 \times l_2$ с током J находится в неоднородном магнитном поле. Найдем силу, действующую на элементарный ток при произвольной ориентации поля. Направим ось Z декартовой системы координат перпендикулярно плоскости рамки (см. рис.).



Воспользуемся выражением для силы Ампера:

$$\boldsymbol{F} = J\int\limits_1 \left[\mathbf{d}\boldsymbol{l}\boldsymbol{B}(1)\right] + J\int\limits_2 \left[\mathbf{d}\boldsymbol{l}\boldsymbol{B}(2)\right] + J\int\limits_3 \left[\mathbf{d}\boldsymbol{l}\boldsymbol{B}(3)\right] + J\int\limits_4 \left[\mathbf{d}\boldsymbol{l}\boldsymbol{B}(4)\right] =$$

$$= J\int\limits_1 \left[\mathbf{d}\boldsymbol{l}\left(\boldsymbol{B}(1) - \boldsymbol{B}(3)\right)\right] + J\int\limits_2 \left[\mathbf{d}\boldsymbol{l}\left(\boldsymbol{B}(2) - \boldsymbol{B}(4)\right)\right] \cong$$

$$\cong -J\int\limits_1 \left[\mathbf{d}\boldsymbol{l}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y} l_2\right)\right] + J\int\limits_2 \left[\mathbf{d}\boldsymbol{l}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x} l_1\right)\right] \cong -Jl_2\left[\boldsymbol{l}_1, \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\right] + Jl_1\left[\boldsymbol{l}_2, \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}\right] =$$

$$= Jl_1 l_2\left(\left[\boldsymbol{j}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}\right] - \left[\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\right]\right) = p_m\left(\left[\boldsymbol{j}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}\right] - \left[\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\right]\right) =$$

$$= p_m\left(\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial x} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial y} \end{vmatrix}\right) =$$

$$= p_m\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial B_z}{\partial x} - \boldsymbol{k}\frac{\partial B_x}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial B_z}{\partial y} - \boldsymbol{k}\frac{\partial B_y}{\partial y}\right) \overset{\substack{\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0 \\ \Downarrow}}{=} p_m\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial B_z}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial B_z}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial B_z}{\partial z}\right) =$$

$$= p_m\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial(\boldsymbol{k}\boldsymbol{B})}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial(\boldsymbol{k}\boldsymbol{B})}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial(\boldsymbol{k}\boldsymbol{B})}{\partial z}\right) = \boldsymbol{i}\left(\boldsymbol{p}_\mathrm{m}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}\right) + \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{p}_\mathrm{m}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\right) + \boldsymbol{k}\left(\boldsymbol{p}_\mathrm{m}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}\right);$$

При преобразованиях было использовано то, что для магнитной индукции всегда $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$.

Полученная формула справедлива и в случае произвольной формы малого витка с током в силу определения $\boldsymbol{p}_\text{m}$ и аддитивности полученной формулы по отношению к магнитному моменту.

Частный случай 1. Постоянный магнитный момент элементарного тока – $\boldsymbol{p}_\text{m} - const$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\frac{\partial(\boldsymbol{p}_\text{m}\boldsymbol{B})}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial(\boldsymbol{p}_\text{m}\boldsymbol{B})}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial(\boldsymbol{p}_\text{m}\boldsymbol{B})}{\partial z},$$

$$\boldsymbol{F} = \text{grad}(\boldsymbol{p}_\text{m}\boldsymbol{B}) \equiv \nabla(\boldsymbol{p}_\text{m}\boldsymbol{B}).$$

После разворота постоянного магнитного момента в магнитном поле:

$$\boldsymbol{F} = \text{grad}(\boldsymbol{p}_\text{m}\boldsymbol{B}) = \text{grad}(p_\text{m}B) = p_\text{m}\,\text{grad}\,B.$$

Виток с током <u>втягивается в область больших значений модуля магнитной индукции</u> тем сильнее, чем больше его магнитный момент и чем сильнее меняется величина магнитной индукции.

Частный случай 2. Отсутствие токов в области расположения магнитного момента (в стороне от источников магнитного поля) – $\text{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} = 0$: $\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x}$, $\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}$, $\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial y}$. В этом случае:

$$F_x = \left(\boldsymbol{p}_\text{m}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}\right) = p_{\text{m}_x}\frac{\partial B_x}{\partial x} + p_{\text{m}_y}\frac{\partial B_y}{\partial x} + p_{\text{m}_z}\frac{\partial B_z}{\partial x} =$$

$$= p_{\text{m}_x}\frac{\partial B_x}{\partial x} + p_{\text{m}_y}\frac{\partial B_x}{\partial y} + p_{\text{m}_z}\frac{\partial B_x}{\partial z} = (\boldsymbol{p}_\text{m}\nabla)B_x,$$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}_\text{m}\nabla)\boldsymbol{B}$$

Дифференциальный оператор $(\boldsymbol{p}_\text{m}\nabla)$ означает взятие производной вдоль вектора $\boldsymbol{p}_\text{m}$ с последующим умножением его на величину этого вектора. Для электрического дипольного момента в неоднородном электрическом поле с напряженностью $\boldsymbol{E}$ сила равна $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\nabla)\boldsymbol{E}$.

Специальная форма контура не играет роли, а помогает только получить формулы в декартовой системе координат. **Эти формулы справедливы для произвольного витка с током, пространственные размеры которого достаточно малы по сравнению с характерными линейными размерами пространственной неоднородности магнитного поля**.