



Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова

Спецкурсы

**«Физика ядерного гамма-резонанса  
в твердом теле»**

**«Методы мессбауэровской спектроскопии»**

Русаков Вячеслав Серафимович

Москва - 2023

# **МАТЕРИАЛЫ К ГЛАВЕ I. СУЩНОСТЬ ЭФФЕКТА МЕССБАУЭРА**

## **§1. Атомное ядро и ядерный энергетический переход**

### **1.1. Характеристики ядра**

### **1.2. Характеристики ядерного энергетического перехода**

### **1.3. Мультипольность излучения и правила отбора**

## **§2. Форма линий испускания и поглощения**

### **2.1. Типы радиационных переходов. Коэффициенты Эйнштейна**

### **2.2. Контур спектральной линии**

### **2.3. Сечения резонансного поглощения и рассеяния**

## **§3. Потеря энергии на отдачу и доплеровское уширение линии**

### **3.1. Свободно покоящееся ядро**

### **3.2. Ядро, участвующее в тепловом движении**

## **§4. Эффект Мессбауэра и его вероятность**

### **4.1. Линии испускания и поглощения ядрами в твердом теле. Вероятность эффекта Мессбауэра**

### **4.2. Основные физические предположения и вероятность эффекта Мессбауэра**

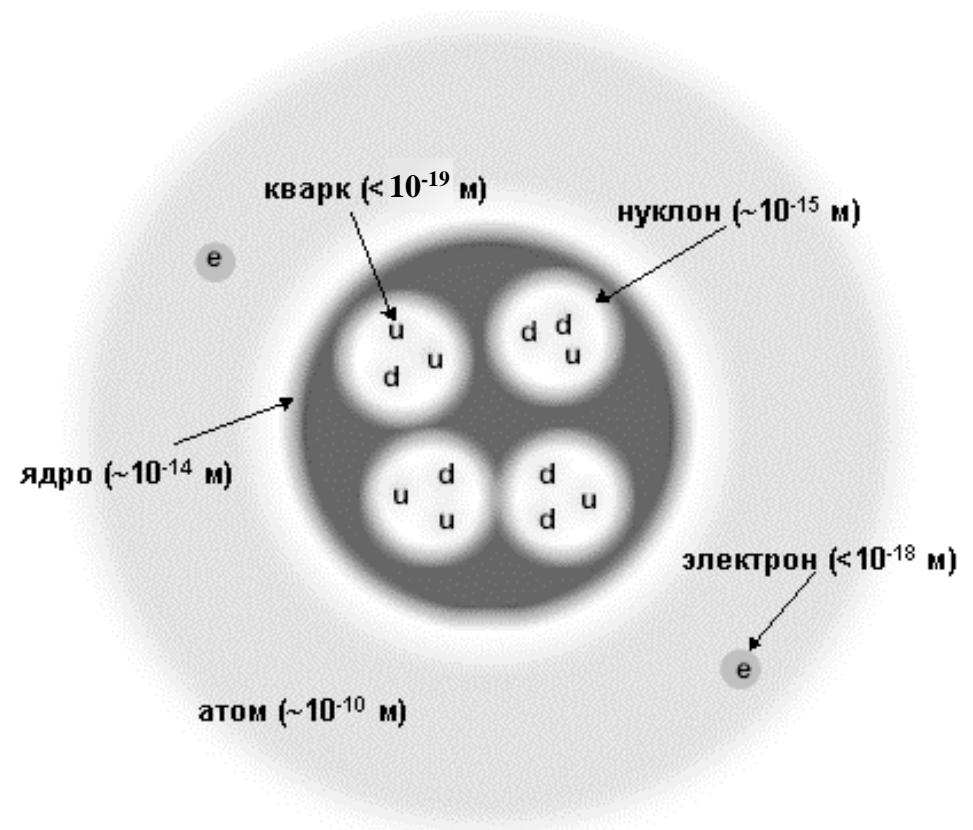
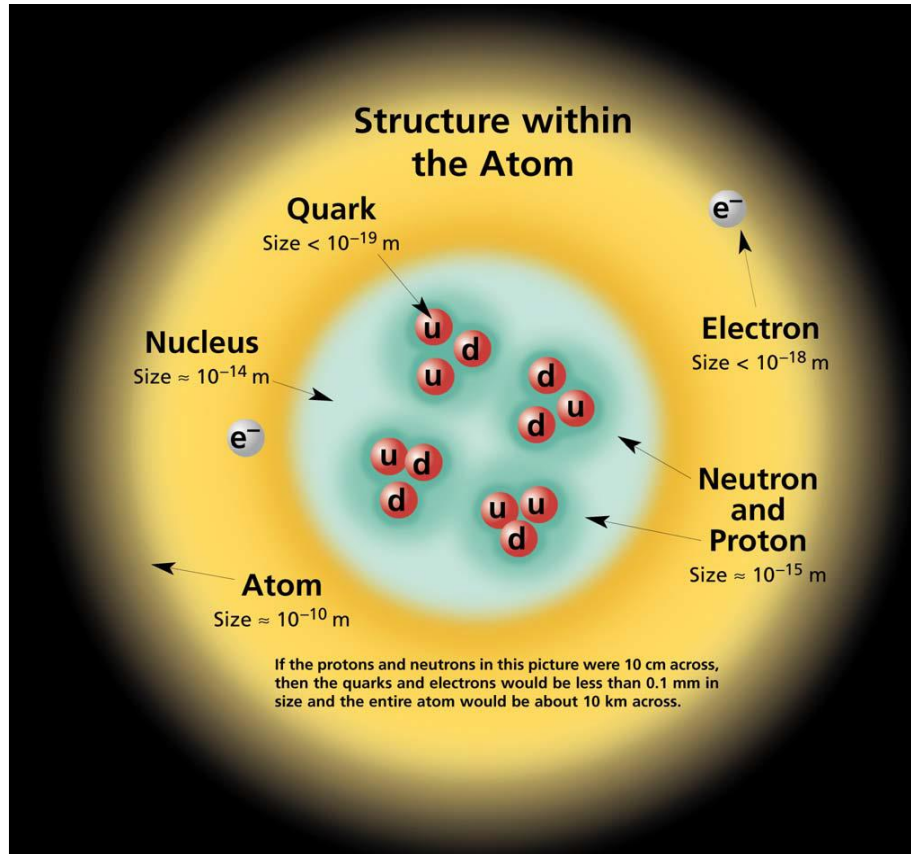
## **§5. Общая схема ядерных превращений в эффекте Мессбауэра**

## **§6. Основные характеристики мессбауэровских изотопов**

# §1. Атомное ядро и ядерный энергетический переход

## 1.1. Характеристики ядра

**Атомное ядро** – связанная система нуклонов: протонов (u,u,d) и нейтронов (u,d,d); положительно заряженная центральная часть атома, в которой сосредоточено 99.9 % массы атома.



**Кварки** – не наблюдающиеся в свободном состоянии фундаментальные фермионы со спином  $s = 1/2$  и с электрическим зарядом, кратным  $e/3$  ( $e$  – элем. заряд): **верхний** (up) – u ( $q = +2/3e$ ), **нижний** (down) – d ( $q = -1/3e$ ). Кварки – точечные частицы вплоть до масштаба  $\sim 0.5 \cdot 10^{-19}$  м. Кварки участвуют во всех видах взаимодействия.

# 1.1. Характеристики ядра

## Система обозначений ядер и нуклидов

### Характеристики атомных ядер:

- **зарядовое число** – число протонов  $Z$  ( $eZ$  – заряд ядра;  $e \cong 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл) определяет порядковый номер элемента в таблице Менделеева и химические свойства соотв. атома;
- **изотопическое число** – число нейтронов  $N$ ;
- **массовое число** – число нуклонов  $A = Z + N$ .

**Нуклид** – любое атомное ядро (и соответствующий ему атом) с заданными числами протонов  $Z$ , нейтронов  $N$  и энергетическим состоянием  $E$  (основным или метастабильным) с временем жизни  $\tau$ , достаточным для наблюдения.

### Классификация ядер (нуклидов):

- **изотопы** – одинаковое  $Z$ , но разное  $N$  ( $A$ );
- **изотоны** – одинаковое  $N$ , но разное  $Z$  ( $A$ );
- **изобары** – одинаковое  $A$ , но разное  $Z$  ( $N$ );
- **изомеры** – одинаковые  $N$  и  $Z$  ( $A$ ), но разное энергетическое состояние ( $E$ ).

**Изомеры** – долгоживущие возбужденные (метастабильные) состояния атомных ядер.

**Обозначение ядра (нуклида):**  ${}^A_Z X_N$ , где  $X$  – символ элемента, т.е. атомов с одинаковым зарядом атомных ядер.

Для изомеров – буква из последовательностей: m, n, p, q, ... или m1, m2, m3, ....

Примеры обозначений: изотопы –  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ ,  ${}^{57}_{26}\text{Fe}$ ; изобары –  ${}^{57}_{26}\text{Fe}$ ,  ${}^{57}_{27}\text{Co}$ ; изомеры:  ${}^{119}_{50}\text{Sn}$ ,  ${}^{119\text{m}}_{50}\text{Sn}$ ;  
изобары –  ${}^{151}_{63}\text{Eu}$ ,  ${}^{151}_{64}\text{Gd}$ ,  ${}^{151}_{62}\text{Sm}$ .

# 1.1. Характеристики ядра

## Таблица нуклидов

P →	1	2	3		
n ↓	H	He	Li	4	5
0	<sup>1</sup> H	<sup>2</sup> He	<sup>3</sup> Li	Be	B
1	<sup>2</sup> D	<sup>3</sup> He	<sup>4</sup> Li	<sup>5</sup> Be	<sup>6</sup> B
2	<sup>3</sup> T	<sup>4</sup> He	<sup>5</sup> Li	<sup>6</sup> Be	<sup>7</sup> B
3	<sup>4</sup> H	<sup>5</sup> He	<sup>6</sup> Li	<sup>7</sup> Be	<sup>8</sup> B
4	<sup>5</sup> H	<sup>6</sup> He	<sup>7</sup> Li	<sup>8</sup> Be	<sup>9</sup> B
5	<sup>6</sup> H	<sup>7</sup> He	<sup>8</sup> Li	<sup>9</sup> Be	<sup>10</sup> B

### Изотоны

Z – varies  
(N – constant)

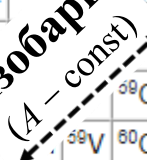


<sup>43</sup> Ca	<sup>44</sup> Sc	<sup>45</sup> Ti	<sup>46</sup> V	<sup>47</sup> Cr	<sup>48</sup> Mn	<sup>49</sup> Fe	<sup>50</sup> Co	<sup>51</sup> Ni	<sup>52</sup> Cu	Zn	31	
<sup>44</sup> Ca	<sup>45</sup> Sc	<sup>46</sup> Ti	<sup>47</sup> V	<sup>48</sup> Cr	<sup>49</sup> Mn	<sup>50</sup> Fe	<sup>51</sup> Co	<sup>52</sup> Ni	<sup>53</sup> Cu	<sup>54</sup> Zn	Ga	32
<sup>45</sup> Ca	<sup>46</sup> Sc	<sup>47</sup> Ti	<sup>48</sup> V	<sup>49</sup> Cr	<sup>50</sup> Mn	<sup>51</sup> Fe	<sup>52</sup> Co	<sup>53</sup> Ni	<sup>54</sup> Cu	<sup>55</sup> Zn	<sup>56</sup> Ga	Ge
<sup>46</sup> Ca	<sup>47</sup> Sc	<sup>48</sup> Ti	<sup>49</sup> V	<sup>50</sup> Cr	<sup>51</sup> Mn	<sup>52</sup> Fe	<sup>53</sup> Co	<sup>54</sup> Ni	<sup>55</sup> Cu	<sup>56</sup> Zn	<sup>57</sup> Ga	<sup>58</sup> Ge
<sup>47</sup> Ca	<sup>48</sup> Sc	<sup>49</sup> Ti	<sup>50</sup> V	<sup>51</sup> Cr	<sup>52</sup> Mn	<sup>53</sup> Fe	<sup>54</sup> Co	<sup>55</sup> Ni	<sup>56</sup> Cu	<sup>57</sup> Zn	<sup>58</sup> Ga	<sup>59</sup> Ge
<sup>48</sup> Ca	<sup>49</sup> Sc	<sup>50</sup> Ti	<sup>51</sup> V	<sup>52</sup> Cr	<sup>53</sup> Mn	<sup>54</sup> Fe	<sup>55</sup> Co	<sup>56</sup> Ni	<sup>57</sup> Cu	<sup>58</sup> Zn	<sup>59</sup> Ga	<sup>60</sup> Ge
<sup>49</sup> Ca	<sup>50</sup> Sc	<sup>51</sup> Ti	<sup>52</sup> V	<sup>53</sup> Cr	<sup>54</sup> Mn	<sup>55</sup> Fe	<sup>56</sup> Co	<sup>57</sup> Ni	<sup>58</sup> Cu	<sup>59</sup> Zn	<sup>60</sup> Ga	<sup>61</sup> Ge
<sup>50</sup> Ca	<sup>51</sup> Sc	<sup>52</sup> Ti	<sup>53</sup> V	<sup>54</sup> Cr	<sup>55</sup> Mn	<sup>56</sup> Fe	<sup>57</sup> Co	<sup>58</sup> Ni	<sup>59</sup> Cu	<sup>60</sup> Zn	<sup>61</sup> Ga	<sup>62</sup> Ge
<sup>51</sup> Ca	<sup>52</sup> Sc	<sup>53</sup> Ti	<sup>54</sup> V	<sup>55</sup> Cr	<sup>56</sup> Mn	<sup>57</sup> Fe	<sup>58</sup> Co	<sup>59</sup> Ni	<sup>60</sup> Cu	<sup>61</sup> Zn	<sup>62</sup> Ga	<sup>63</sup> Ge
<sup>52</sup> Ca	<sup>53</sup> Sc	<sup>54</sup> Ti	<sup>55</sup> V	<sup>56</sup> Cr	<sup>57</sup> Mn	<sup>58</sup> Fe	<sup>59</sup> Co	<sup>60</sup> Ni	<sup>61</sup> Cu	<sup>62</sup> Zn	<sup>63</sup> Ga	<sup>64</sup> Ge
<sup>53</sup> Ca	<sup>54</sup> Sc	<sup>55</sup> Ti	<sup>56</sup> V	<sup>57</sup> Cr	<sup>58</sup> Mn	<sup>59</sup> Fe	<sup>60</sup> Co	<sup>61</sup> Ni	<sup>62</sup> Cu	<sup>63</sup> Zn	<sup>64</sup> Ga	<sup>65</sup> Ge
<sup>54</sup> Ca	<sup>55</sup> Sc	<sup>56</sup> Ti	<sup>57</sup> V	<sup>58</sup> Cr	<sup>59</sup> Mn	<sup>60</sup> Fe	<sup>61</sup> Co	<sup>62</sup> Ni	<sup>63</sup> Cu	<sup>64</sup> Zn	<sup>65</sup> Ga	<sup>66</sup> Ge
<sup>55</sup> Ca	<sup>56</sup> Sc	<sup>57</sup> Ti	<sup>58</sup> V	<sup>59</sup> Cr	<sup>60</sup> Mn	<sup>61</sup> Fe	<sup>62</sup> Co	<sup>63</sup> Ni	<sup>64</sup> Cu	<sup>65</sup> Zn	<sup>66</sup> Ga	<sup>67</sup> Ge
<sup>56</sup> Ca	<sup>57</sup> Sc	<sup>58</sup> Ti	<sup>59</sup> V	<sup>60</sup> Cr	<sup>61</sup> Mn	<sup>62</sup> Fe	<sup>63</sup> Co	<sup>64</sup> Ni	<sup>65</sup> Cu	<sup>66</sup> Zn	<sup>67</sup> Ga	<sup>68</sup> Ge
<sup>57</sup> Ca	<sup>58</sup> Sc	<sup>59</sup> Ti	<sup>60</sup> V	<sup>61</sup> Cr	<sup>62</sup> Mn	<sup>63</sup> Fe	<sup>64</sup> Co	<sup>65</sup> Ni	<sup>66</sup> Cu	<sup>67</sup> Zn	<sup>68</sup> Ga	<sup>69</sup> Ge
<sup>58</sup> Ca	<sup>59</sup> Sc	<sup>60</sup> Ti	<sup>61</sup> V	<sup>62</sup> Cr	<sup>63</sup> Mn	<sup>64</sup> Fe	<sup>65</sup> Co	<sup>66</sup> Ni	<sup>67</sup> Cu	<sup>68</sup> Zn	<sup>69</sup> Ga	<sup>70</sup> Ge

Изотопы  
N – varies  
(Z – constant)



Изобары  
(A – const)



Период полураспада (пример: Gd)

<sup>145</sup> Gd	Нестабильный (менее суток)
<sup>146</sup> Gd	1—10 дней
<sup>149</sup> Gd	10—100 дней
<sup>153</sup> Gd	100 дней — 10 лет
<sup>148</sup> Gd	10—10 000 лет
<sup>150</sup> Gd	10 тыс.—700 млн лет
<sup>152</sup> Gd	>700 млн лет (природный радиоактивный)
<sup>158</sup> Gd	Стабильный

<sup>107</sup> Rh	<sup>108</sup> Pd	<sup>109</sup> Ag	<sup>110</sup> Cd	<sup>111</sup> In	<sup>112</sup> Sn	<sup>113</sup> Sb	<sup>114</sup> Te	<sup>115</sup> I	<sup>116</sup> Xe	<sup>117</sup> Cs
<sup>108</sup> Rh	<sup>109</sup> Pd	<sup>110</sup> Ag	<sup>111</sup> Cd	<sup>112</sup> In	<sup>113</sup> Sn	<sup>114</sup> Sb	<sup>115</sup> Te	<sup>116</sup> I	<sup>117</sup> Xe	<sup>118</sup> Cs
<sup>109</sup> Rh	<sup>110</sup> Pd	<sup>111</sup> Ag	<sup>112</sup> Cd	<sup>113</sup> In	<sup>114</sup> Sn	<sup>115</sup> Sb	<sup>116</sup> Te	<sup>117</sup> I	<sup>118</sup> Xe	<sup>119</sup> Cs
<sup>110</sup> Rh	<sup>111</sup> Pd	<sup>112</sup> Ag	<sup>113</sup> Cd	<sup>114</sup> In	<sup>115</sup> Sn	<sup>116</sup> Sb	<sup>117</sup> Te	<sup>118</sup> I	<sup>119</sup> Xe	<sup>120</sup> Cs
<sup>111</sup> Rh	<sup>112</sup> Pd	<sup>113</sup> Ag	<sup>114</sup> Cd	<sup>115</sup> In	<sup>116</sup> Sn	<sup>117</sup> Sb	<sup>118</sup> Te	<sup>119</sup> I	<sup>120</sup> Xe	<sup>121</sup> Cs
<sup>112</sup> Rh	<sup>113</sup> Pd	<sup>114</sup> Ag	<sup>115</sup> Cd	<sup>116</sup> In	<sup>117</sup> Sn	<sup>118</sup> Sb	<sup>119</sup> Te	<sup>120</sup> I	<sup>121</sup> Xe	<sup>122</sup> Cs
<sup>113</sup> Rh	<sup>114</sup> Pd	<sup>115</sup> Ag	<sup>116</sup> Cd	<sup>117</sup> In	<sup>118</sup> Sn	<sup>119</sup> Sb	<sup>120</sup> Te	<sup>121</sup> I	<sup>122</sup> Xe	<sup>123</sup> Cs
<sup>114</sup> Rh	<sup>115</sup> Pd	<sup>116</sup> Ag	<sup>117</sup> Cd	<sup>118</sup> In	<sup>119</sup> Sn	<sup>120</sup> Sb	<sup>121</sup> Te	<sup>122</sup> I	<sup>123</sup> Xe	<sup>124</sup> Cs
<sup>115</sup> Rh	<sup>116</sup> Pd	<sup>117</sup> Ag	<sup>118</sup> Cd	<sup>119</sup> In	<sup>120</sup> Sn	<sup>121</sup> Sb	<sup>122</sup> Te	<sup>123</sup> I	<sup>124</sup> Xe	<sup>125</sup> Cs
<sup>116</sup> Rh	<sup>117</sup> Pd	<sup>118</sup> Ag	<sup>119</sup> Cd	<sup>120</sup> In	<sup>121</sup> Sn	<sup>122</sup> Sb	<sup>123</sup> Te	<sup>124</sup> I	<sup>125</sup> Xe	<sup>126</sup> Cs
<sup>117</sup> Rh	<sup>118</sup> Pd	<sup>119</sup> Ag	<sup>120</sup> Cd	<sup>121</sup> In	<sup>122</sup> Sn	<sup>123</sup> Sb	<sup>124</sup> Te	<sup>125</sup> I	<sup>126</sup> Xe	<sup>127</sup> Cs
<sup>118</sup> Rh	<sup>119</sup> Pd	<sup>120</sup> Ag	<sup>121</sup> Cd	<sup>122</sup> In	<sup>123</sup> Sn	<sup>124</sup> Sb	<sup>125</sup> Te	<sup>126</sup> I	<sup>127</sup> Xe	<sup>128</sup> Cs
<sup>119</sup> Rh	<sup>120</sup> Pd	<sup>121</sup> Ag	<sup>122</sup> Cd	<sup>123</sup> In	<sup>124</sup> Sn	<sup>125</sup> Sb	<sup>126</sup> Te	<sup>127</sup> I	<sup>128</sup> Xe	<sup>129</sup> Cs
<sup>120</sup> Rh	<sup>121</sup> Pd	<sup>122</sup> Ag	<sup>123</sup> Cd	<sup>124</sup> In	<sup>125</sup> Sn	<sup>126</sup> Sb	<sup>127</sup> Te	<sup>128</sup> I	<sup>129</sup> Xe	<sup>130</sup> Cs
<sup>121</sup> Rh	<sup>122</sup> Pd	<sup>123</sup> Ag	<sup>124</sup> Cd	<sup>125</sup> In	<sup>126</sup> Sn	<sup>127</sup> Sb	<sup>128</sup> Te	<sup>129</sup> I	<sup>130</sup> Xe	<sup>131</sup> Cs
<sup>122</sup> Rh	<sup>123</sup> Pd	<sup>124</sup> Ag	<sup>125</sup> Cd	<sup>126</sup> In	<sup>127</sup> Sn	<sup>128</sup> Sb	<sup>129</sup> Te	<sup>130</sup> I	<sup>131</sup> Xe	<sup>132</sup> Cs

Обозначение ядра (нуклида) –  ${}^A_ZX_N$ .

Долина (линия) стабильности:  $N/Z \cong 0.98 + 0.015 \cdot A^{2/3}$ .

# 1.1. Характеристики ядра

## Характеристики нуклонов

Нуклон	Линейный размер, м	Масса покоя, кг	Заряд, e	Спин, $\hbar$	Магнитный момент, $\mu_n$
Протон	$\sim 1.4 \cdot 10^{-15}$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	+1	1/2	+2.792
Нейтрон	$\sim 1.5 \cdot 10^{-15}$	$1.68 \cdot 10^{-27}$	$< 2 \cdot 10^{-22}$	1/2	-1.913

$\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – приведённая (редуцированная) постоянная Планка (постоянная Дира́ка),  
 $\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p} \cong 5.05 \cdot 10^{-27}$  Дж/Тл – ядерный магнетон. 1 Ф (Фёрми) = 1 фм (фемтометр) =  $10^{-15}$  м.

### Распределение массы и заряда в ядре, радиус ядра

Эксперименты по рассеянию  $\alpha$ -частиц (опыты Эрнеста Резерфорда, 1908–1911 гг.) и электронов высокой энергии (опыты Роберта Хофштадтера, 1955–1958 гг.) на атомных ядрах.

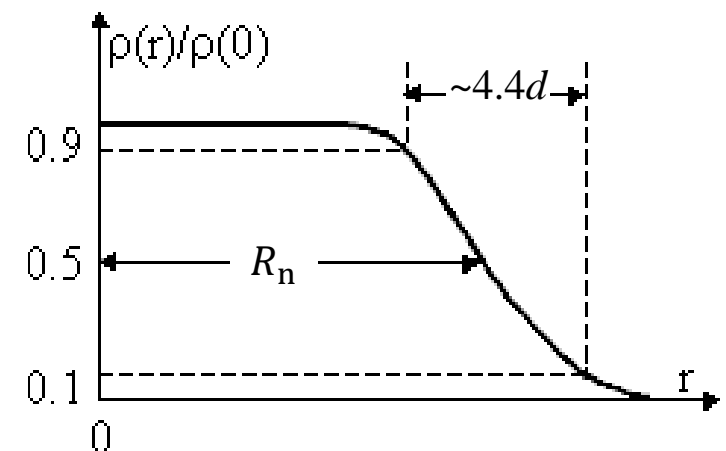
Плотности распределения ядерной материи (массы) и электрического заряда практически совпадают и приблизительно описываются распределением Ферми:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R_n}{d}}}$$

$\rho_0$  – ( $\sim$ ) плотность ядерной материи в центре ядра,

$R_n$  – **радиус ядра** – расстояние, на котором  $\rho(R_n) = \rho_0/2$ ,

$d$  – **параметр диффузности** ( $d \cong 0.55 \cdot 10^{-15} = 0.55$  фм).



# 1.1. Характеристики ядра

## Распределение массы и заряда в ядре, радиус ядра

### Установленные закономерности:

- Плотность ядерной материи в центре ядра приблизительно одинакова у всех ядер:

$$\rho_0 \sim 0.17 \text{ нукл./фм}^3 \cong \\ \cong 2.9 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3 = 290000 \text{ т/мм}^3.$$

- Толщина поверхностного слоя (спад плотности от  $0.9\rho_0$  до  $0.1\rho_0$ ) у всех ядер примерно одинакова  $\sim 4.4d \cong 2.4 \cdot \text{фм}$ .

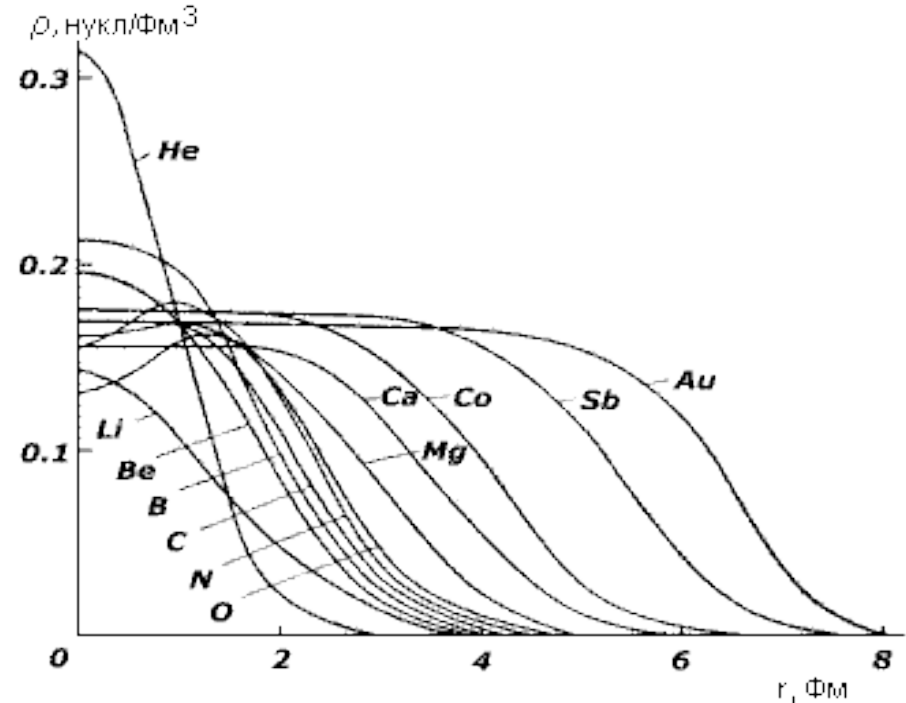
- Радиус ядра  $R_n$  определяется числом нуклонов  $A$ :

$$R_n \cong r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \cong 1.23 \text{ фм}.$$

Атомные ядра вблизи долины стабильности – компактные объекты:  $2 \text{ фм} \leq R \leq 10 \text{ фм}$ .

Соотношение  $R_n \cong r_0 A^{1/3}$  означает практическую независимость средней плотности ядра от массового числа (слабую сжимаемость ядерной материи):

$$\bar{\rho} = \frac{M(A, Z)}{V(A, Z)} \cong \frac{m_n A}{4/3 \cdot \pi R_n^3} \cong \frac{m_n}{4/3 \cdot \pi r_0^3} = \text{const}(A).$$



Плотность распределения ядерной материи.

# 1.1. Характеристики ядра

## Квантовые характеристики ядерных состояний

### Моменты нуклонов и спин атомного ядра

**Спин** – собственный момент импульса (количества движения) частиц, имеющий квантовую природу и не связанный с перемещением частицы как целого.

**Спин атомного ядра** или **атома** определяется как векторная сумма (вычисленная по правилам сложения моментов в квантовой механике) спинов элементарных частиц, образующих систему, и их орбитальных моментов, обусловленных движением частиц внутри системы.

Спин измеряется в постоянных Дирака  $\hbar$  и равен  $\hbar s$ , где  $s$  – целое (в том числе нулевое) или полуцелое положительное число – так называемое **спиновое квантовое число**, которое обычно называют просто **спином**.

Поскольку нуклоны обладают спином  $s = 1/2$ , то и ядра должны иметь собственные моменты импульса – **спины**.

Кроме того, нуклоны участвуют в ядре в орбитальном движении, которое также характеризуется определённым моментом количества движения каждого нуклона.

**Орбитальный момент** нуклона равен  $\hbar l$ , где  $l$  – **орбитальное квантовое число** принимает только целочисленные значения.

**Полный момент количества движения нуклона  $j$**  в ядре складывается из его спина  $s$  и орбитального момента  $l$  относительно центра масс ядра (в ед.  $\hbar$ ):

$$j = s + l.$$



# 1.1. Характеристики ядра

## Квантовые характеристики ядерных состояний

### Моменты нуклонов и спин атомного ядра

Атомное ядро в каждом состоянии характеризуется **полным моментом количества движения  $J$** , который в системе покоя ядра называется **спином ядра**. Спин  $J$  ядра наряду с его массой  $M$  является механической характеристикой ядра как системы нуклонов.

Спин ядра  $J$  складывается из **спиновых  $s_1, s_2, \dots, s_A$**  и **орбитальных  $l_1, l_2, \dots, l_A$  моментов отдельных нуклонов**:

$$J = \sum_{i=1}^A s_i + \sum_{i=1}^A l_i.$$

Несмотря на то, что число нуклонов в ядре может быть очень велико, спины ядер обычно невелики и составляют не более нескольких постоянных Дирака  $\hbar$ , что объясняется особенностью взаимодействия одноимённых нуклонов.

Для спинов атомных ядер экспериментально установлены закономерности:

- если массовое число  $A$  чётное, то спин ядра  $J$  имеет целочисленное значение –  $J = n$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;
- если  $A$  нечётное, то спин ядра имеет полуцелое значение –  $J = n + 1/2$ ;
- чётно ( $Z$ )-чётные ( $N$ ) ядра в основном состоянии имеют значение спина –  $J = 0$  (из-за взаимной компенсации моментов нуклонов в основном состоянии ядра).

# 1.1. Характеристики ядра

## Четность нуклонов и атомного ядра

### Оператор четности и его собственные значения

**Пространственная четность  $P$  волновой функции  $\psi(\mathbf{r})$  – это собственное значение оператора пространственной инверсии (четности):**

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r}) = P\psi(\mathbf{r}).$$

Если функция  $\psi(\mathbf{r})$  нечетная:  $\psi(-\mathbf{r}) = -\psi(\mathbf{r})$ , то  $P = -1$ .

Если функция четная:  $\psi(-\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$ , то  $P = +1$ .

**Собственная (внутренняя) четность нуклона  $\pi_i = +1$ .**

**Орбитальная четность нуклона в сферически симметричном поле равна  $(-1)^{l_i}$ ,**  
где  $l_i$  – орбитальный момент  $i$ -го нуклона.

**Четность  $i$ -го нуклона  $P_i$ :  $P_i = \pi_i \cdot (-1)^{l_i} = (-1)^{l_i}$ .**

**Четность атомного ядра  $P$  равна произведению четностей отдельных его нуклонов  $P_i$ ,**  
а в результате – произведению их орбитальных четностей  $(-1)^{l_i}$ :

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_A = \prod_{i=1}^A P_i = \prod_{i=1}^A (-1)^{l_i} = (-1)^{\sum_{i=1}^A l_i}.$$

Обозначение состояния ядра со спином  $J$  и четностью  $P$ :  $J^P$  ( $J^+$ ,  $J^-$ ).

# 1.1. Характеристики ядра

## Электромагнитные моменты атомных ядер

### Электрический квадрупольный момент ядра

**Электрический квадрупольный момент ядра  $eQ$**  ( $Q$  – в единицах заряда протона  $e > 0$ ) определяет взаимодействие ядра с внешним неоднородным электрическим полем. Непосредственно связан с отклонением формы ядра от сферически симметричной формы. Положительный квадрупольный момент означает, что ядро имеет форму вытянутого эллипсоида вращения, отрицательный – форму сплюснутого эллипсоида вращения.

Квадрупольный электрический момент  $Q$  от ядра к ядру меняется в пределах:

$$-0.15 \div +15 \text{ б} \quad (1 \text{ б} \equiv 1 \text{ барн} \equiv 10^{-28} \text{ м}^2).$$

Квадрупольный момент ядра  $eQ \neq 0$  только у ядер со спином  $J \geq 1$ .

### Магнитный дипольный момент ядра

**Магнитный дипольный момент** определяет взаимодействие ядра с внешним магнитным полем (в системе единиц измерения SI):

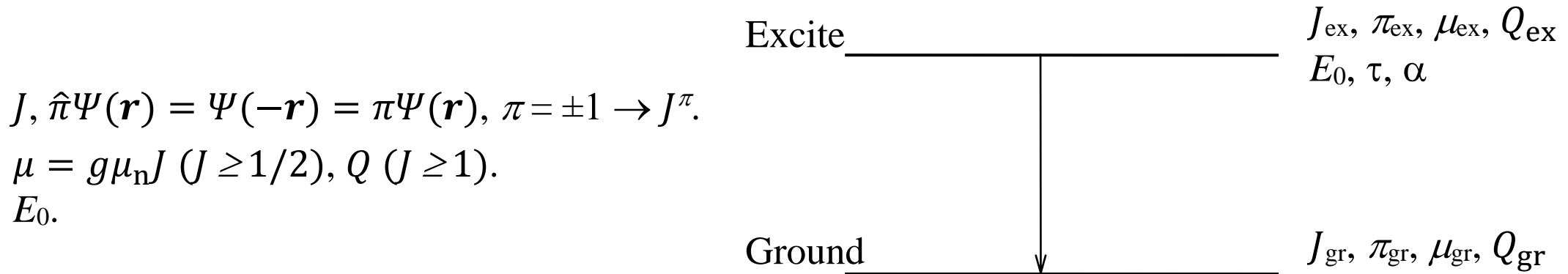
$$\underline{\mu = g\mu_n J},$$

где  $g \equiv \frac{\mu/\mu_n}{J}$  –  **$g$ -фактор**, или **ядерное гиромагнитное отношение**,  $J$  – спин ядра (в ед.  $\hbar$ ),

$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p} \cong 5.05 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл}$  – **ядерный магнетон**,  $m_p$  – масса протона.

Магнитный момент ядра  $\mu \neq 0$  только у ядер с  $J \geq 1/2$ .

## 1.2. Характеристики ядерного энергетического перехода



$$J, \hat{\pi}\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(-\mathbf{r}) = \pi\Psi(\mathbf{r}), \pi = \pm 1 \rightarrow J^\pi.$$

$$\mu = g\mu_n J (J \geq 1/2), Q (J \geq 1).$$

$E_0.$

Алберт Эйнштейн, 1916 г. "К квантовой теории излучения": переход атома из возбужденного в другое состояние происходит мгновенно и имеет характер статистического процесса:

$w$  – **вероятность спонтанного перехода в единицу времени** – const(t);  $[w] = 1/\text{с}$ .

Пусть  $P(t)$  – **вероятность нахождения ядра в возбужденном состоянии в момент времени  $t$** , тогда:

$$P(t + dt) = P(t)(1 - wdt) \Rightarrow P(t + dt) - P(t) = -P(t)wdt,$$

$$P(t) = P(0)e^{-wt}. \text{ При } P(0) = 1: \underline{P(t) = e^{-wt}}.$$

Вероятность того, что в момент времени  $t$  ядро находится в возбужденном состоянии и в следующий интервал времени  $dt$  перейдет в основное состояние:

$$P(t) \cdot wdt = we^{-wt} dt,$$

(Среднее) **время жизни ядра в возбужденном состоянии  $\tau$** .

$$\underline{\tau \equiv \bar{t}} = \int_0^\infty t we^{-wt} dt = \underline{\frac{1}{w}}.$$

$$\text{Время полураспада } t_{1/2}: P(t_{1/2}) \equiv \frac{1}{2}P(0) \Rightarrow t_{1/2} = \ln 2 \cdot \tau \cong 0.693 \cdot \tau.$$

# Принцип неопределенности Гейзенберга

**Вернер Карл Гейзенберг** (*Werner Karl Heisenberg*; 1901 – 1976) – немецкий физик-теоретик, один из создателей квантовой механики, лауреат Нобелевской премии по физике (1932 г.) – «За создание квантовой механики, применение которой привело, помимо прочего, к открытию аллотропических форм водорода».

(В орто-форме  $o\text{-H}_2$  в молекуле водорода спины ядер параллельны –  $\uparrow\uparrow$ .)

В пара-форме  $p\text{-H}_2$  в молекуле водорода ядерные спины антипараллельны –  $\uparrow\downarrow$ .)

**Принцип неопределённости Гейзенберга** (1927 г.) для неопределенностей значений энергии  $\Delta E$  и времени  $\Delta t$ :

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar.$$

Трактовка: за ограниченное время  $\Delta t$  энергия замкнутой квантовой системы, находящейся в нестационарном состоянии, может быть определена с точностью, не большей  $\Delta E$

**Естественная ширина уровня**  $\Gamma_\tau$  для квантовых систем (ядер, атомов, молекул) в возбужденных состояниях – минимальная неопределенность энергии нестационарного состояния замкнутой квантовой системы –  $\Gamma_\tau \equiv \min(\Delta E \geq \hbar/\Delta t)$ :

$$\Gamma_\tau \equiv \hbar/\tau = \hbar\omega.$$

Оценка  $\Gamma_\tau$  в случае мессб. ядра  $^{57}\text{Fe}$  ( $E_0 \cong 14.4 \cdot \text{кэВ}$ ,  $\tau \cong 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ ,  $1 \text{ эВ} \cong 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ):

$$\Gamma_\tau = \frac{\hbar}{\tau} \cong \frac{1.055 \cdot 10^{-34}}{1.4 \cdot 10^{-7} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} \cong 5 \cdot 10^{-9} \text{ эВ}, \quad \frac{E_0}{\Gamma_\tau} \cong \frac{14.4 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-9}} \cong 3 \cdot 10^{12} \text{ !!!}$$

Для  $^{107}_{47}\text{Ag}$ :  $\sim 10^{22}$ .



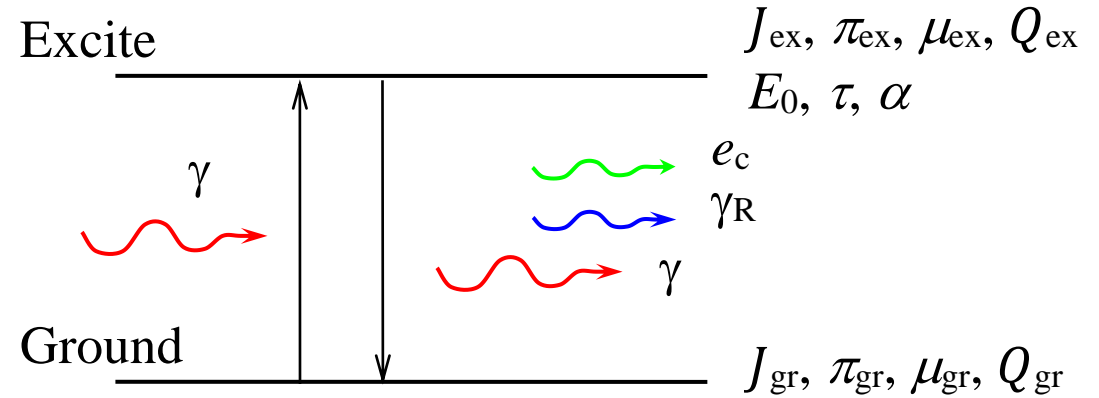
## 1.2. Характеристики ядерного энергетического перехода

$$J, \hat{\pi}\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(-\mathbf{r}) = \pi\Psi(\mathbf{r}), \pi = \pm 1 \rightarrow J^\pi.$$

$$\mu = g\mu_n J \quad (J \geq 1/2), \quad Q \quad (J \geq 1).$$

$$E_0, \tau, w - \text{const}(t), \tau = 1/w, t_{1/2} = \ln(2) \cdot \tau.$$

$$\Gamma_\tau = \hbar/\tau = \hbar w.$$



### Коэффициент внутренней конверсии $\alpha$ .

Энергия возбуждения ядра может передаваться s-электронам (с орбитальным квантовым числом  $l = 0$ ) в первую очередь внутренних электронных слоев атома (1s, 2s, 3s, ...):

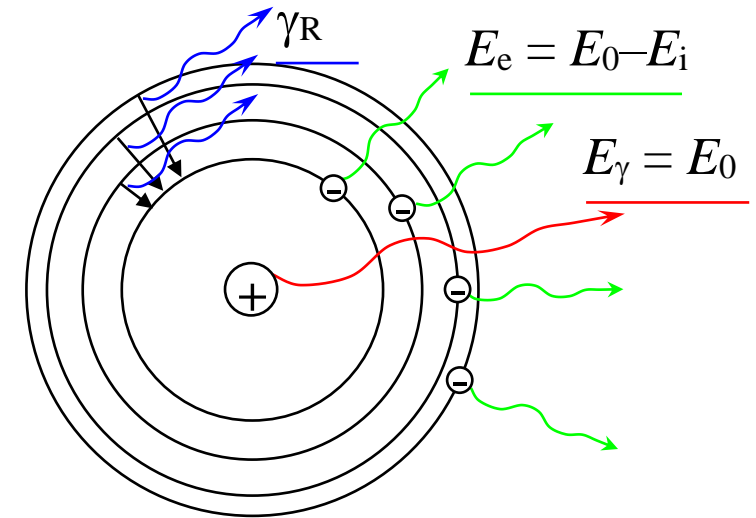
$$w = w_\gamma + w_e,$$

$$\alpha \equiv \frac{w_e}{w_\gamma}, \quad \alpha = \alpha_K + \alpha_L + \alpha_M + \dots,$$

(K-, L-, M-, ... электронные слои атома;  $n = 1, 2, 3, \dots$ );

$$\alpha(^{57}\text{Fe}) = 8.2, \quad \alpha(^{119}\text{Sn}) = 5.2.$$

$$\frac{w_\gamma}{w} = \frac{w_\gamma}{w_\gamma + w_e} = \frac{1}{1 + \alpha}.$$



### 1.3. Мультипольность излучения и правила отбора

Электромагнитное излучение с длиной волны  $\lambda$ , которая гораздо больше линейных размеров  $R$  излучающей системы (ядра)  $\lambda \gg R$ , на расстояниях  $r \gg R$  может быть представлено в виде суперпозиции электрических (EL) и магнитных (ML) мультипольных излучений – излучений колеблющихся электрических и магнитных точечных мультиполей – диполей, квадрупольных, октупольных и т.д. (разложение решения волнового уравнения на сумму векторных сферических гармоник).

Каждое мультипольное излучение характеризуется **угловым моментом (моментом количества движения, порядком мультипольности)**  $L$  (дипольное излучение –  $L = 1$ , квадрупольное –  $L = 2$ , октупольное –  $L = 3$ , ...) и определенной **четностью**  $\pi_\gamma (= \pm 1)$ .

Направление электромагнитного поля ( $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{B}$ ) при  $\pi_\gamma = -1$  меняет, а при  $\pi_\gamma = +1$  не меняет свое направление на противоположное при пространственной инверсии, то есть отражении точки наблюдения в центре излучения ( $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ ).

Четность для мультипольного излучения равна:

$$\pi_\gamma(EL) = (-1)^L, \pi_\gamma(ML) = (-1)^{L+1}.$$

Для определения мультипольности излучения (типа E или M и его **порядка мультипольности**  $L$ ) в соответствии с законами сохранения момента количества движения и четности для системы «ядро +  $\gamma$ -квант» получаем **правила отбора**:

$$|J_{\text{ex}} - J_{\text{gr}}| \leq L \leq J_{\text{ex}} + J_{\text{gr}},$$

$$\pi_\gamma = \pi_{\text{ex}}\pi_{\text{gr}}: \quad \begin{aligned} \pi_\gamma(EL) &= (-1)^L = \pi_{\text{ex}}\pi_{\text{gr}}, \\ \pi_\gamma(ML) &= (-1)^{L+1} = \pi_{\text{ex}}\pi_{\text{gr}}. \end{aligned}$$

### 1.3. Мультипольность излучения и правила отбора

Вероятность перехода  $w_\gamma$  возрастает с увеличением энергии  $E_\gamma$  (с уменьшением  $\lambda$ )  $\gamma$ -кванта и очень резко уменьшается с увеличением углового момента  $L$ :

$$w_\gamma(EL) = k(E)(R/\lambda)^{2L},$$

$$w_\gamma(ML) = k(M)(R/\lambda)^{2(L+1)}.$$

При том же порядке мультипольности  $L$ :  $w_\gamma(ML)/w_\gamma(EL) = \frac{k(M)}{k(E)}(R/\lambda)^2 \ll 1$ .

Для чистых электрического или магнитного излучений  $\gamma$ -квант обычно имеет наименьший угловой момент  $L$ , разрешенный правилами отбора:  $L = |J_{\text{ex}} - J_{\text{gr}}|$ .

В случае смешанного магнитного (М) и электрического (Е) излучения  $\gamma$ -квант, как правило, имеет наименьший порядок мультипольности  $L$  для М- и следующий за ним  $L + 1$  для Е-излучения.

Мультипольность излучения  $\gamma$ -квантов  
для мессбауэровских переходов ядер  $^{57}\text{Fe}$ ,  $^{119}\text{Sn}$  и  $^{151}\text{Eu}$ .

Ядро	$J_{\text{gr}}$	$J_{\text{ex}}$	$L$	$\pi_{\text{gr}}$	$\pi_{\text{ex}}$	$\pi_\gamma$	Мультипольность излучения
$^{57}\text{Fe}$	1/2	3/2	$1 \leq L \leq 2$	-1	-1	+1	М1 (Е2)
$^{119}\text{Sn}$	1/2	3/2	$1 \leq L \leq 2$	+1	+1	+1	М1 (Е2)
$^{151}\text{Eu}$	5/2	7/2	$1 \leq L \leq 6$	+1	+1	+1	М1 (Е2)

$$|J_{\text{ex}} - J_{\text{gr}}| \leq L \leq J_{\text{ex}} + J_{\text{gr}}, \quad \pi_\gamma(EL) = (-1)^L = \pi_{\text{ex}}\pi_{\text{gr}}, \quad \pi_\gamma(ML) = (-1)^{L+1} = \pi_{\text{ex}}\pi_{\text{gr}}.$$



## §2. Форма линий испускания и поглощения

### 2.1. Типы радиационных переходов. Коэффициенты Эйнштейна

**Альберт Эйнштейн** (*Albert Einstein*, 1879 – 1955)

один из основателей современной теоретической физики, лауреат Нобелевской премии по физике 1921 года.

"За заслуги перед теоретической физикой и особенно за открытие закона фотоэлектрического эффекта"

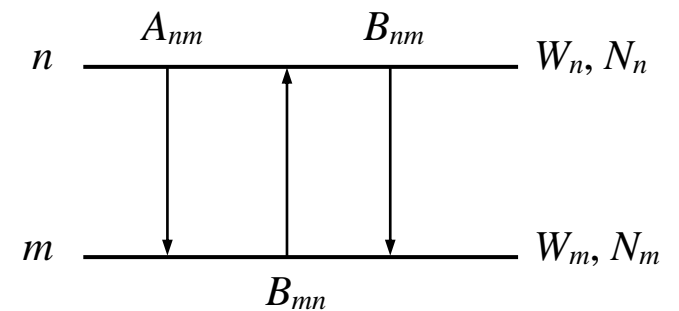
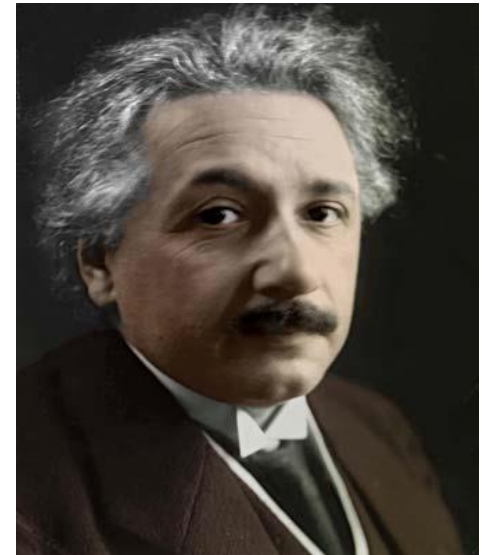
В 1916 г. Альберт Эйнштейн в работе "К квантовой теории излучения" сформулировал основные постулаты теории.

**Три типа радиационных переходов:**

**1. Спонтанное испускание** – самопроизвольный переход ядра из энергетически более высокого состояния  $n$  в состояние  $m$  с меньшей энергией с испусканием  $\gamma$ -кванта (мгновенно, с вероятностью в единицу времени  $w = \text{const}(t)$ ).

**2. Поглощение** – поглощение  $\gamma$ -кванта индуцирующего излучения и переход из состояния  $m$  в состояние  $n$ .

**3. Вынужденное испускание** – переход ядра из состояния  $n$  в состояние  $m$  под действием внешнего резонансного  $\gamma$ -кванта индуцирующего излучения с испусканием точно такого же кванта: с теми же энергией, импульсом и угловым моментом  $L$ .



Радиационные переходы в двух-уровневой квантовой системе.

## 2.1. Типы радиационных переходов. Коэффициенты Эйнштейна

Средние мощности (потоки энергии) спонтанного излучения  $P_{nm}^{СИ}$ , поглощения  $P_{mn}^П$  и вынужденного излучения  $P_{nm}^{ВИ}$  единицы объема вещества  $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{с}\cdot\text{м}^3}\right)$ :

$$P_{nm}^{СИ} = A_{nm} N_n \hbar \omega_{nm},$$

$$P_{mn}^П = B_{mn} N_m \hbar \omega_{nm} u(\omega_{nm}),$$

$$P_{nm}^{ВИ} = B_{nm} N_n \hbar \omega_{nm} u(\omega_{nm}).$$

$A_{nm}, B_{mn}, B_{nm}$  – коэффициенты Эйнштейна,

$N_m$  и  $N_n$  – заселенности (населенности) уровней  $\left(\frac{1}{\text{м}^3}\right)$  – концентрация ядер, находящихся в состояниях  $m$  и  $n$  соответственно ( $N_m + N_n = N$  – концентрация всех ядер).

$u(\omega_{nm})$  – спектральная объемная плотность энергии индуцирующего излучения  $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{с}^{-1}\cdot\text{м}^3}\right)$ .

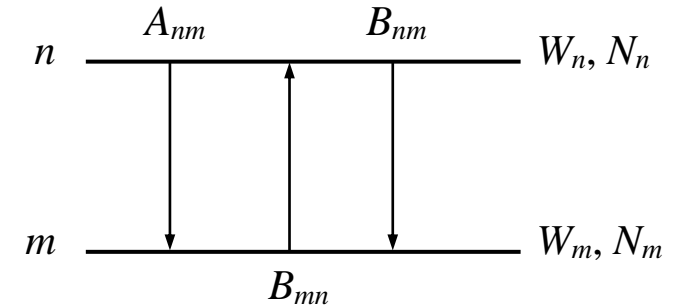
$A_{nm} = W_\gamma, B_{mn}u(\omega_{nm}), B_{nm}u(\omega_{nm})$  – вероятности радиац. переходов ядра в ед. времени ( $\text{с}^{-1}$ ).

При рассмотрении термодинамически равновесных процессов взаимодействия ядер с излучением в классическом приближении (сравнивая с законом теплового излучения Рэля-Джинса), можно получить взаимосвязь коэффициентов Эйнштейна:

$$g_n B_{nm} = g_m B_{mn}, \quad \frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{\hbar \omega_{nm}^3}{\pi^2 c^3}, \quad (\text{только один из коэффициентов независим !})$$

где  $g_m$  и  $g_n$  – кратности энергетических состояний  $m$  и  $n$  соответственно.

Эти соотношения имеют общий характер и применимы к любым переходам для любых квантовых систем и подтверждаются без всяких исключений.



## 2.2. Контур спектральной линии

Введем в рассмотрение **спектральные плотности** мощности спонтанного излучения  $p_{nm}^{СИ}(\omega)$ , поглощения  $p_{mn}^{П}(\omega)$  и вынужденного излучения  $p_{nm}^{ВИ}(\omega)$  единицы объема вещества  $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{с}\cdot\text{м}^3\cdot\text{с}^{-1}}\right)$  при радиационных ядерных переходах  $n \leftrightarrow m$ :

$$p_{nm}^{СИ}(\omega) = a_{nm}(\omega)N_n\hbar\omega,$$

$$p_{mn}^{П}(\omega) = b_{mn}(\omega)N_m\hbar\omega u(\omega),$$

$$p_{nm}^{ВИ}(\omega) = b_{nm}(\omega)N_n\hbar\omega u(\omega).$$

Здесь  $a_{nm}(\omega)$ ,  $b_{mn}(\omega)$  и  $b_{nm}(\omega)$  – **спектральные плотности коэффициентов Эйнштейна**.  
 $a_{nm}$ ,  $b_{mn}u(\omega)$ ,  $b_{nm}u(\omega)$  – **спектральные плотности вероятности радиационных переходов ядра в единицу времени** ( $\text{с}^{-1}/\text{с}^{-1} = 1$ ).

С учетом  $\Delta\omega \ll \omega_{nm}$  ( $\omega_{nm}/\Delta\omega \sim 3 \cdot 10^{12}$ ) – в приближении, когда функции  $\omega$  и  $u(\omega)$  меняются слабо по сравнению со спектральными плотностями коэффициентов Эйнштейна:

$$\int_0^\infty a_{nm}(\omega)d\omega = A_{nm}, \int_0^\infty b_{mn}(\omega)d\omega = B_{mn}, \int_0^\infty b_{nm}(\omega)d\omega = B_{nm}.$$

При этом справедливы соотношения:

$$g_n b_{nm}(\omega) = g_m b_{mn}(\omega), \quad \frac{a_{nm}(\omega)}{b_{nm}(\omega)} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}.$$

С точностью до  $\Delta\omega \ll \omega_{nm}$  спектральные плотности коэффициентов Эйнштейна для поглощения  $b_{mn}(\omega)$  вынужденного  $b_{nm}(\omega)$  и спонтанного  $a_{nm}(\omega)$  испусканий **имеют подобные контуры !!!**

## 2.2. Контур спектральной линии

В соответствии с экспоненциальным по времени распадом возбужденного состояния **неподвижного** ядра ( $N_n(t) = N_n P(t) = N_n(0)e^{-wt}$ ,  $I(t) \sim -\frac{dN_n}{dt}$ ,  $I(t) = I(0)e^{-wt}$ ), спектральные плотности мощности  $p_{nm}^{си}(\omega)$  и коэффициента Эйнштейна для спонтанного излучения  $a_{nm}(\omega)$  описываются дисперсионной формулой Брейта-Вигнера (функцией Лоренца  $-\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ ) с естественной шириной  $\Delta\omega$  спектральной линии ( $\Gamma_\tau = \hbar w \equiv \hbar\Delta\omega$ ):

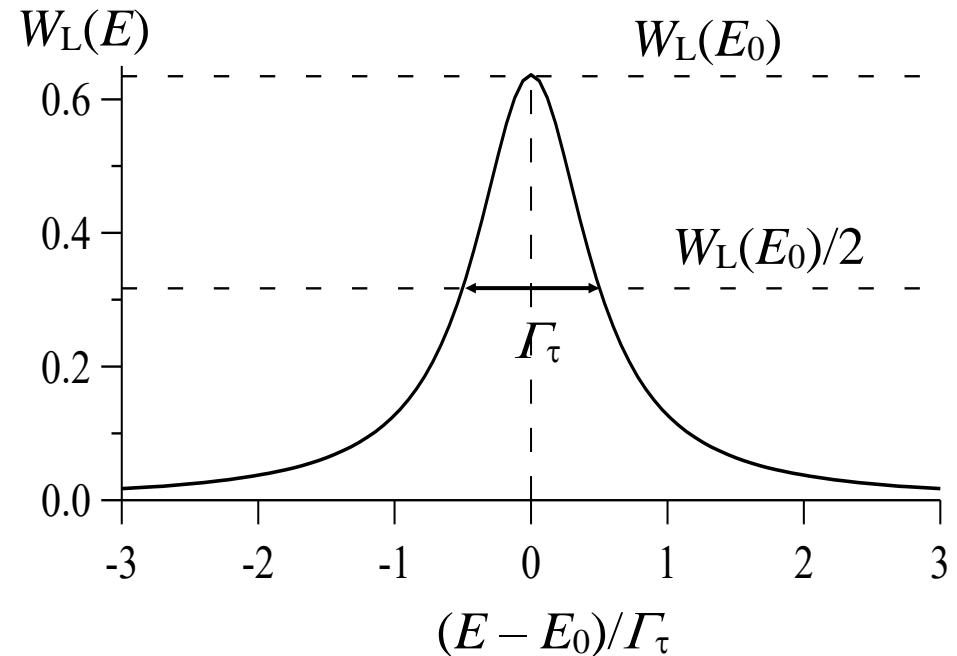
$$a_{nm}(\omega) = A_{nm} \frac{2}{\pi\Delta\omega} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega/2}\right)^2}$$

Та же функция Лоренца для энергетической линии излучения (поглощения) для системы ядер и для плотности вероятности испускания (поглощения)  $\gamma$ -кванта с энергией  $E = \hbar\omega$ :

$$W_L(E) = a_{nm}(\omega)/A_{nm} = \frac{2}{\pi\Gamma_\tau} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{E - E_0}{\Gamma_\tau/2}\right)^2}$$

$$\int_0^\infty W_L(E) dE = 1.$$

$^{57}\text{Fe}$ :  $E_0 \cong 14,4$  кэВ,  $\tau = 1,4 \cdot 10^{-7}$  с,  $\Gamma_\tau \cong 5 \cdot 10^{-9}$  эВ;  
 $E_0/\Gamma_\tau \cong 3 \cdot 10^{12}$  – **!!!** Для  $^{107}_{47}\text{Ag}$ :  $\sim 10^{22}$ .



Форма энергетической линии излучения (поглощения).

## 2.3. Сечения резонансного поглощения и рассеяния

**Сечение резонансного поглощения**  $\sigma(\omega)$  – это вероятность поглощения в единицу времени одним покоящимся ядром  $\gamma$ -кванта с частотой  $\omega$  (энергией  $E = \hbar\omega$ ) при единичной плотности потока таких  $\gamma$ -квантов:

$$\sigma(\omega) = \frac{b_{mn}(\omega)u(\omega)}{n_\gamma(\omega)}, [\sigma(\omega)] = \frac{[b_{mn}(\omega)u(\omega)]}{[n_\gamma(\omega)]} = \frac{c^{-1}/c^{-1}}{c^{-1}M^{-2}/c^{-1}} = M^2 \text{ (1барн} \equiv 1б \equiv 10^{-28}M^2\text{)}.$$

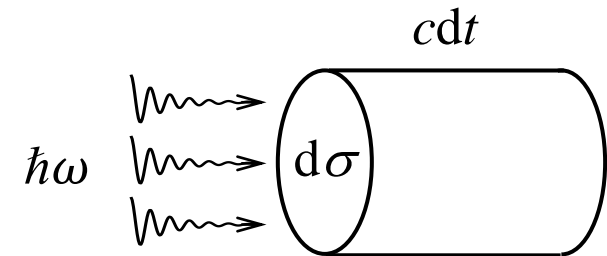
где  $b_{mn}(\omega)u(\omega)$  – спектральная плотность вероятности поглощения  $\gamma$ -кванта ядром в единицу времени при индуцирующем излучении со спектральной объемной плотностью энергии  $u(\omega)$ ,  $n_\gamma(\omega)$  – спектральная плотность плотности потока  $\gamma$ -квантов индуцирующего излучения с энергией  $\hbar\omega$ .

$$b_{mn}(\omega) = \frac{g_n}{g_m} b_{nm}(\omega) = \frac{g_n}{g_m} \cdot \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3} a_{nm}(\omega);$$

$$u(\omega) = \frac{n_\gamma(\omega)d\sigma d\theta d\hbar\omega}{d\sigma c dt} = \frac{n_\gamma(\omega)\hbar\omega}{c};$$

$$\sigma(\omega) = \frac{b_{mn}(\omega)\hbar\omega}{c} = \frac{g_n}{g_m} \cdot \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2} a_{nm}(\omega),$$

$$\omega \rightarrow \frac{E}{\hbar}, \frac{2\pi c}{\lambda}; \quad g_{m,n} = 2J_{m,n} + 1; \quad A_{nm} = w_{nm}^\gamma = \frac{\Gamma_\gamma}{\hbar}; \quad \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_\tau} = \frac{w_\gamma}{w} = \frac{1}{1 + \alpha}.$$



Рассматриваемый элемент поверхности и объема.

## 2.3. Сечения резонансного поглощения и рассеяния

$$\sigma(E) = \frac{2J_{\text{ex}} + 1}{2J_{\text{gr}} + 1} \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \alpha} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{E - E_0}{\Gamma_\tau/2}\right)^2} = \sigma_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{E - E_0}{\Gamma_\tau/2}\right)^2}, \quad \sigma_0 = \frac{2J_{\text{ex}} + 1}{2J_{\text{gr}} + 1} \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \alpha}$$

где  $\sigma_0$  – максимальное сечение резонансного поглощения (при  $E = E_0$ ).

Относительная вероятность спонтанного испускания  $\gamma$ -кванта:  $\frac{w^\gamma}{w} = \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_\tau} = \frac{1}{1 + \alpha}$ .

**Максимальное сечение резонансного рассеяния:**

$$\sigma_0^{\text{sc}} = \sigma_0 \frac{1}{1 + \alpha} = \frac{2J_{\text{ex}} + 1}{2J_{\text{gr}} + 1} \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1 + \alpha}\right)^2$$

Максимальное сечение резонансного поглощения  $\sigma_0$  для мессбауэровских переходов достигает значения  $\sim 10^6$  б ( $1 \text{ б} \equiv 10^{-28} \text{ м}^2$ ). Для ядра  $^{57}\text{Fe}$ :  $\sigma_0 \cong 2.56 \cdot 10^6$  б.

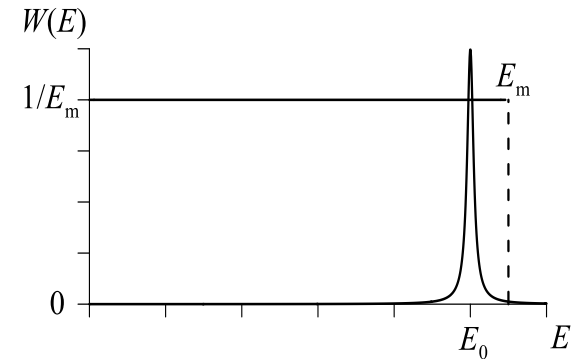
Если падающее излучение имеет спектральное распределение  $W(E)$  (плотность вероятности иметь энергию  $E$ ;  $\int_0^\infty W(E) dE = 1$ ), то эффекты поглощения (рассеяния) будут определяться **эффективным сечением резонансного поглощения (рассеяния)**:

$$\sigma_{\text{eff}} = \int_0^\infty \sigma(E) W(E) dE.$$

## 2.3. Сечения резонансного поглощения и рассеяния

При постоянной интенсивности падающего излучения до энергии  $E_m > \sim(E_0 + 5\Gamma_\tau)$ :  $W(E) = \begin{cases} 1/E_m & \text{при } E \leq E_m \\ 0 & \text{при } E > E_m \end{cases}$ , эффективное сечение поглощения равно:

$$\sigma_{\text{eff}} = \int_0^\infty \sigma(E)W(E)dE = \frac{1}{E_m} \int_0^{E_m} \sigma_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{E - E_0}{\Gamma_\tau/2}\right)^2} dE \cong \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma_\tau}{E_m} \sigma_0.$$



Использовать сплошной спектр излучения (например, рентгеновской трубки) не представляется возможным, так как в этом случае эффективное сечение будет очень малым: при  $\Gamma_\tau \cong 5 \cdot 10^{-9}$  эВ и  $E_m \cong 14.4$  кэВ:  $\Gamma_\tau/E_m \cong 3 \cdot 10^{-13}$ . Интенсивности тормозного излучения рентгеновской трубки не хватит.

Однако можно использовать спектр синхротронного излучения ( $I_c/I_p = 10^4 - 10^{15}$  !).

В опытах по эффекту Мессбауэра: если линия испускания и линия поглощения имеют лоренцевскую форму с естественной шириной, и энергии центров линий совпадают, то:

$$\underline{\sigma_{\text{eff}}} = \int_0^\infty \sigma(E)W(E)dE = \int_0^\infty \sigma_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{E - E_0}{\Gamma_\tau/2}\right)^2} \cdot \frac{2}{\pi\Gamma_\tau} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{E - E_0}{\Gamma_\tau/2}\right)^2} dE = \underline{\frac{\sigma_0}{2}} !$$

# §3. Потеря энергии на отдачу и доплеровское уширение линии

## 3.1. Свободно покоящееся ядро

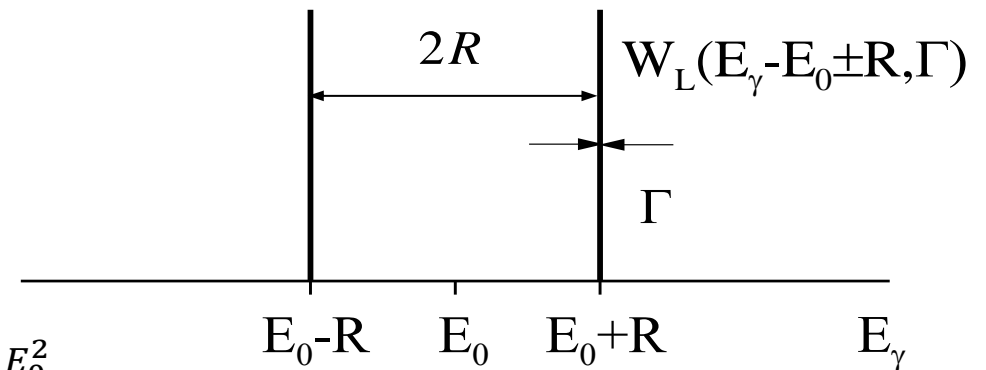


**Законы сохранения импульса и энергии:**

$$0 = -P + p_\gamma, \quad E_0 = \frac{P^2}{2m} + E_\gamma,$$

$$P = p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}.$$

**Линия испускания    Линия поглощения**



**Энергия отдачи  $R$ :**

$$\underline{R} \equiv E_0 - E_\gamma = \frac{P^2}{2m} = \frac{p_\gamma^2}{2m} = \frac{E_\gamma^2}{2mc^2} = \frac{(E_0 - R)^2}{2mc^2} \cong \underline{\frac{E_0^2}{2mc^2}};$$

$$E_\gamma = E_0 - R, \quad R \cong \frac{E_0^2}{2mc^2}; \quad \underline{E_0 \gg R \gg \Gamma_\tau}.$$

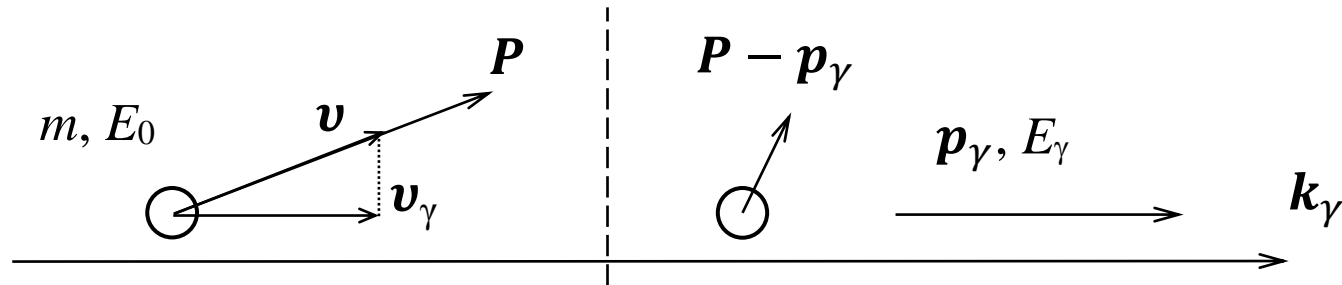
$$^{57}\text{Fe}: E_0 = 14.4 \text{ кэВ}, \quad R \cong 2 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}, \quad \Gamma_\tau \cong 5 \cdot 10^{-9} \text{ эВ}, \quad \underline{R/E_0 \sim 1.4 \cdot 10^{-7}}, \quad \underline{R/\Gamma_\tau \sim 4 \cdot 10^5}.$$



## §3. Потеря энергии на отдачу и доплеровское уширение линии

### 3.2. Ядро, участвующее в тепловом движении

#### Доплеровское уширение линии



**Законы сохранения импульса и энергии:**  $E_0 + \frac{p^2}{2m} = \frac{(p - p_\gamma)^2}{2m} + E_\gamma$ ;

$$E_\gamma = E_0 + \frac{p^2}{2m} - \frac{(p - p_\gamma)^2}{2m} = E_0 + \frac{p \cdot p_\gamma}{m} - \frac{p_\gamma^2}{2m} = E_0 + \frac{p \cdot p_\gamma}{m} - R = E_0 - R + v_\gamma \frac{E_\gamma}{c} \cong E_0 - R + v_\gamma \frac{E_0}{c}.$$

Однозначность взаимосвязи  $E_\gamma$  и  $v_\gamma$ :  $f(E_\gamma)dE_\gamma = f(v_\gamma)dv_\gamma$  и распределение Максвелла для

проекции скорости теплового движения  $v_\gamma$ :  $f(v_\gamma) = \text{const} \cdot e^{-\frac{mv_\gamma^2}{2k_B T}}$ :

$$f(E_\gamma) = \frac{c}{E_0} f(v_\gamma) = \text{const} \cdot e^{-\frac{mv_\gamma^2}{2k_B T}} = \text{const} \cdot e^{-\frac{m \left( \frac{c}{E_0} (E_\gamma - E_0 + R) \right)^2}{2k_B T}} =$$

$$= \text{const} \cdot e^{-\left( (E_\gamma - E_0 + R) / \sqrt{\frac{2k_B T}{m} \left( \frac{E_0}{c} \right)^2} \right)^2} = \text{const} \cdot e^{-\left( \frac{E_\gamma - (E_0 - R)}{2\sqrt{k_B T R}} \right)^2} \text{ — распределение Гаусса.}$$

## §3. Потеря энергии на отдачу и доплеровское уширение линии

### 3.2. Ядро, участвующее в тепловом движении

#### Доплеровское уширение линии

Форма линии – функция Гаусса:

$$W_G(E_\gamma) = \text{const} \cdot e^{-\left(\frac{E_\gamma - (E_0 - R)}{D}\right)^2},$$

$D = 2\sqrt{k_B T R}$  – интегральная ширина.

Ширина на половине высоты:

$$\Gamma_G = 2\sqrt{\ln 2} \cdot D \cong 1.67 \cdot D.$$

$$\underline{E_0 \gg \Gamma_G \gg \Gamma_\tau}.$$

$^{57}\text{Fe}$ :  $E_0 = 14.4$  кэВ,  $\Gamma_\tau \cong 5 \cdot 10^{-9}$  эВ,  $\underline{R \cong 2 \cdot 10^{-3}}$  эВ;

при  $T = 4\text{K}$ :  $\underline{D \cong 1.6 \cdot 10^{-3}}$  эВ,  $D/\Gamma_\tau \sim 3 \cdot 10^6$ ,  $D \sim R$ ;

при  $T = 300\text{K}$ :  $\underline{D \cong 1.4 \cdot 10^{-2}}$  эВ,  $D/\Gamma_\tau \sim 3 \cdot 10^5$ ;  $D > R$ .

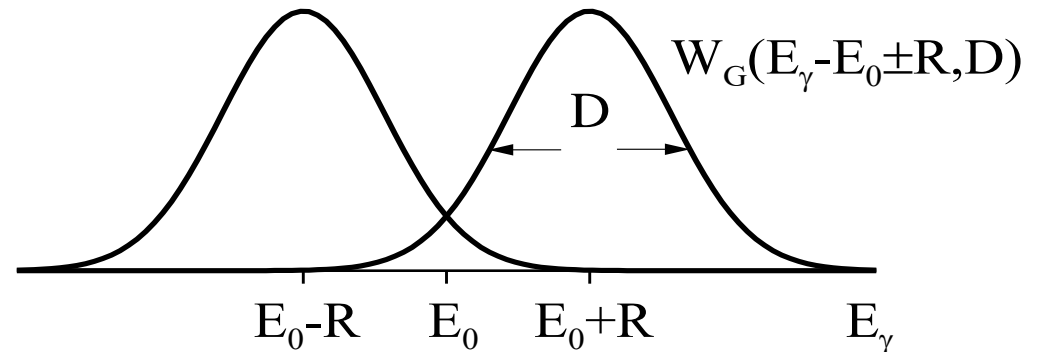
**Филипп Б. Мун** (Англия), 1951 г. –  $\gamma$ -резонанс за счет движения источника относительно поглотителя

$$\left(\nu = \frac{c}{E_0} \cdot R \sim 100 \text{ м/с}\right).$$

**Карл Малфорс** (Швеция), 1952 г. –  $\gamma$ -резонанс за счет перекрытия линий испускания и поглощения.

$$S: ^{198}\text{Au}; A: ^{198}\text{Hg}, E_0 = 411 \text{ кэВ}; T \uparrow \downarrow \Rightarrow D \uparrow \downarrow \Rightarrow \sigma \uparrow \downarrow \Rightarrow I_{\text{пр}} \downarrow \uparrow.$$

Линия испускания    Линия поглощения



## §4. Эффект Мессбауэра и его вероятность

### 4.1. Линии испускания и поглощения ядрами в твердом теле.

#### Вероятность эффекта Мессбауэра

$$E_0 - E_\gamma = \Delta E_{\text{in}} + \Delta E_{\text{tr}}.$$

$$\Delta E_{\text{in}} \cong \hbar\omega_{\text{упр}} \cong k_B\vartheta_D \cong 4 \cdot 10^{-2} \text{эВ},$$

$$R \cong \frac{E_0^2}{2mc^2} \cong 2 \cdot 10^{-3} \text{эВ}, \quad D = 2\sqrt{k_B TR} \cong 1.6 \cdot 10^{-3} \text{эВ},$$

$R < \Delta E_{\text{in}} \rightarrow$  есть вероятность того, что  $\Delta E_{\text{in}} = 0!$

$$\Delta E_{\text{tr}} = R_T = R \frac{m}{m_T}, \quad D_T = D \sqrt{\frac{m}{m_T}} \left( \frac{m}{m_T} \cong 10^{-18} \right),$$

$$R_T \ll \Gamma_\tau, \quad D_T \ll \Gamma_\tau \quad (\Gamma_\tau \cong 5 \cdot 10^{-9} \text{эВ}):$$

Несмещенная линия –  $\Delta E_{\text{in}} = 0$ :  $W_L, E_0, \Gamma_\tau$  !!!

Побочные линии –  $\Delta E_{\text{in}} > 0$  и  $\Delta E_{\text{in}} < 0$ :

$$W_G, E_0 \pm R, D \cong 2\sqrt{k_B TR}.$$

Вероятность эффекта Мессбауэра  $f$  – вероятность

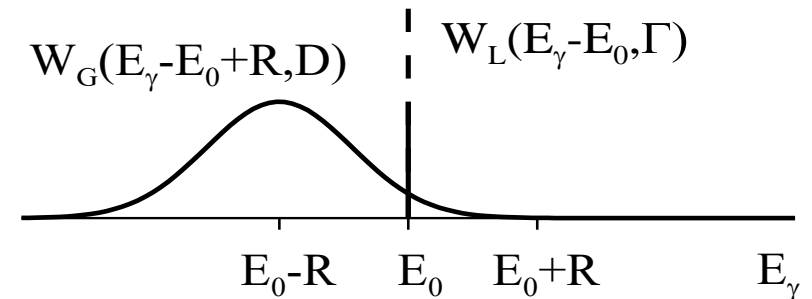
безотдачного процесса поглощения или испускания  $\gamma$ -квантов ядрами в твердом теле.

Спектральные линии испускания ("+") и поглощения ("-"):

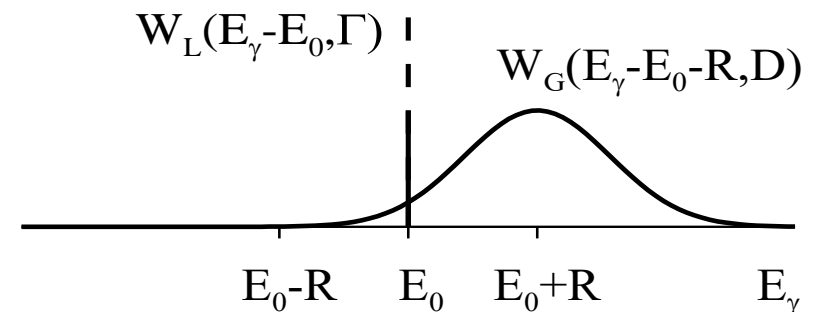
$$W(E) = (1 - f) \cdot W_G(E - E_0 \pm R, D) + f \cdot W_L(E - E_0, \Gamma_\tau).$$

Рудольф Мессбауэр, 1958 г. – в металлическом Ir на  $^{191}\text{Ir}$  с  $E_0 = 129$  кэВ:  $I_{\text{пр}} \downarrow$  ( $\eta \uparrow$ ) при  $T \downarrow$ .

Линия испускания



Линия поглощения



## 4.2. Основные физические предположения и вероятность эффекта Мессбауэра.

### 1. Случай существенно нерелятивистский.

Скорость ядра при отдаче  $v_{от}$  и средняя скорость теплового движения  $v_T$  ядра гораздо меньше скорости света ( $mv_{от} = P = p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} \cong \frac{E_0}{c}$ ;  $\frac{mv_T^2}{2} \cong 3 \frac{k_B T}{2}$ ):

$$v_{от} \cong \frac{E_0}{mc} \sim 80 \text{ м/с}, v_T \cong \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \sim 300 \text{ м/с} \ll c \cong 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

### 2. Размеры ядра гораздо меньше длины волны $\gamma$ -кванта.

В этом случае можно рассматривать поглощение  $\gamma$ -кванта ядром как одной частицей без учета состояния (координат) нуклонов ( $E_0 \cong E_\gamma = h\nu = h \frac{c}{Tc} = h \frac{c}{\lambda}$ ).

$$R_{яд} \cong (2 \div 10) \cdot 10^{-15} \text{ м} \ll \lambda = \frac{hc}{E_0} \sim 10^{-10} \text{ м}.$$

### 3. Процесс испускания и поглощения $\gamma$ -кванта ядром адиабатический – без изменения состояния электронной системы.

Энергия отдачи  $R$  гораздо меньше энергии связи электрона в атоме  $E_e$ :

$$R \cong 2 \cdot 10^{-3} \text{ эВ} \ll E_e = 1 \div 10 \text{ эВ}.$$

В процессе испускания и поглощения ядро и электроны в атоме ведут себя как единое целое.

## 4.2. Основные физические предположения и вероятность эффекта Мессбауэра.

**4. Энергия внутриядерного взаимодействия гораздо больше энергии межатомного взаимодействия:**

$$E_{\text{яд}} \sim E_0 > \sim 10^4 \text{ эВ} \gg E_{\text{ат}} \cong k_{\text{Б}} \mathcal{G}_{\text{D}} \sim 4 \cdot 10^{-2} \text{ эВ.}$$

Движение нуклонов внутри ядра не зависит от движения (колебания) атомов системы.

**5. Гармоническое приближение и состояние термодинамического равновесия.**

$$f = e^{-2W}, 2W = \left\langle (\mathbf{k}_{\gamma} \cdot \mathbf{u})^2 \right\rangle_{\tau} = \frac{\langle u_{\gamma}^2 \rangle_{\tau}}{\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2} \quad (\tau \sim 10^{-7} \text{ с} \gg T_{\text{упр}} \sim 10^{-13} \div 10^{-12} \text{ с}).$$

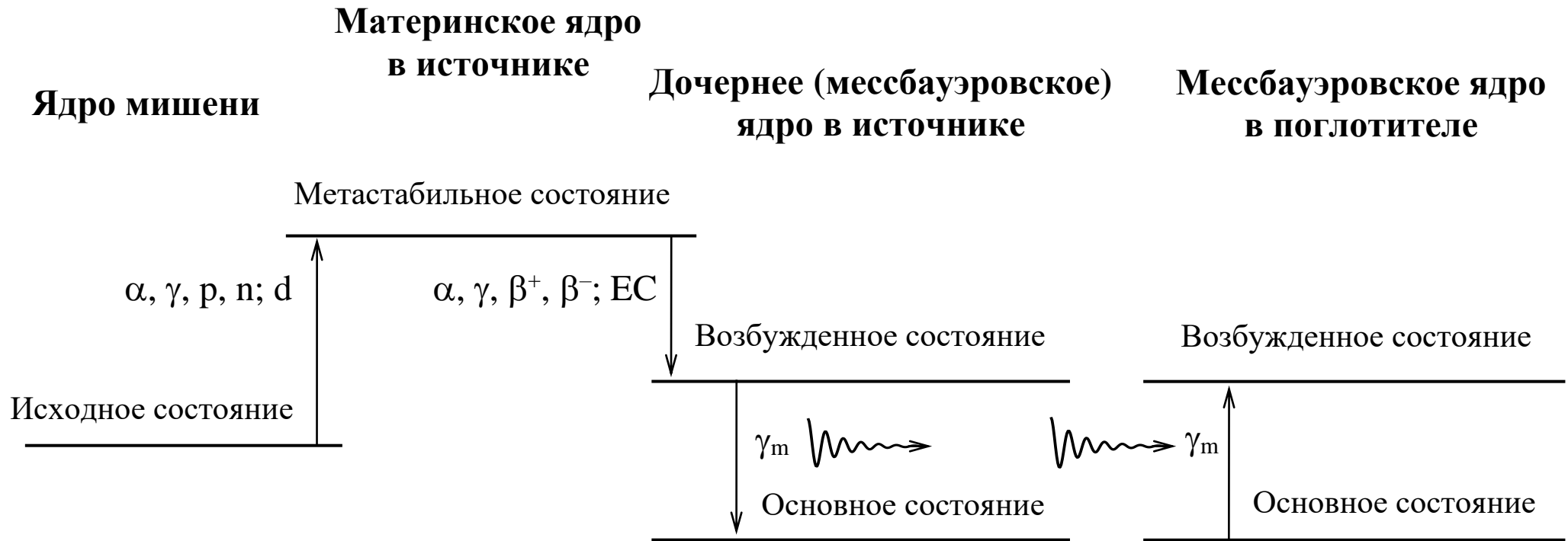
$$T \ll \frac{\hbar\omega_{\text{упр}}}{2k_{\text{Б}}}: \left\langle \frac{ku^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = 3 \frac{\hbar\omega_{\text{упр}}}{4}, \quad \langle u^2 \rangle = \frac{3\hbar\omega_{\text{упр}}}{2k} \sim \frac{1}{\sqrt{km}}, \quad 2W \sim \frac{\langle u^2 \rangle}{\lambda^2} \sim \frac{E_0^2}{\sqrt{km}};$$

$$T \gg \frac{\hbar\omega_{\text{упр}}}{2k_{\text{Б}}}: \left\langle \frac{ku^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = 3 \frac{k_{\text{Б}}T}{2}, \quad \langle u^2 \rangle = \frac{3k_{\text{Б}}T}{k} \sim \frac{T}{k}, \quad 2W \sim \frac{\langle u^2 \rangle}{\lambda^2} \sim \frac{E_0^2}{k} T.$$

Здесь:  $\mathbf{k}_{\gamma} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}_{\gamma}$  – волновой вектор  $\gamma$ -кванта,  $\mathbf{u}$  – тепловое смещение ядра (атома) из положения равновесия,  $k$  – коэффициент жесткости атомных связей,  $\omega_{\text{упр}} \sim \sqrt{k/m}$  – частота тепловых колебаний. В результате получим:

$$\underline{f \uparrow \text{ при } E_0 \downarrow, k \uparrow; m \uparrow; T \downarrow.}$$

## §5. Общая схема ядерных превращений в эффекте Мессбауэра



### Ядра мишени:

$\alpha, \gamma, p, n$  – облучение  $\alpha$ -частицами,  $\gamma$ -квантами, протонами  $p$  или нейтронами  $n$ ;  
 $d$  – (disintegrate) деление ядра.

### Материнские ядра:

$\alpha, \gamma, \beta^+, \beta^-$  – самопроизвольное испускание  $\alpha$ -частиц,  $\gamma$ -квантов, позитронов  $\beta^+$  или электронов  $\beta^-$ ;  
 $EC$  – (electron capture) электронный захват.

# Примеры схем ядерных превращений

## Схема ядерных превращений для мессбауэровского изотопа $^{57}\text{Fe}$ (мессбауэровский источник – ядра $^{57}\text{Co}$ )

массовое число  $\rightarrow$   $^{57}\text{Fe}$  (2.14%)  
 атомный номер  $\rightarrow$   $^{57}_{26}\text{Fe}$  (2.14%)

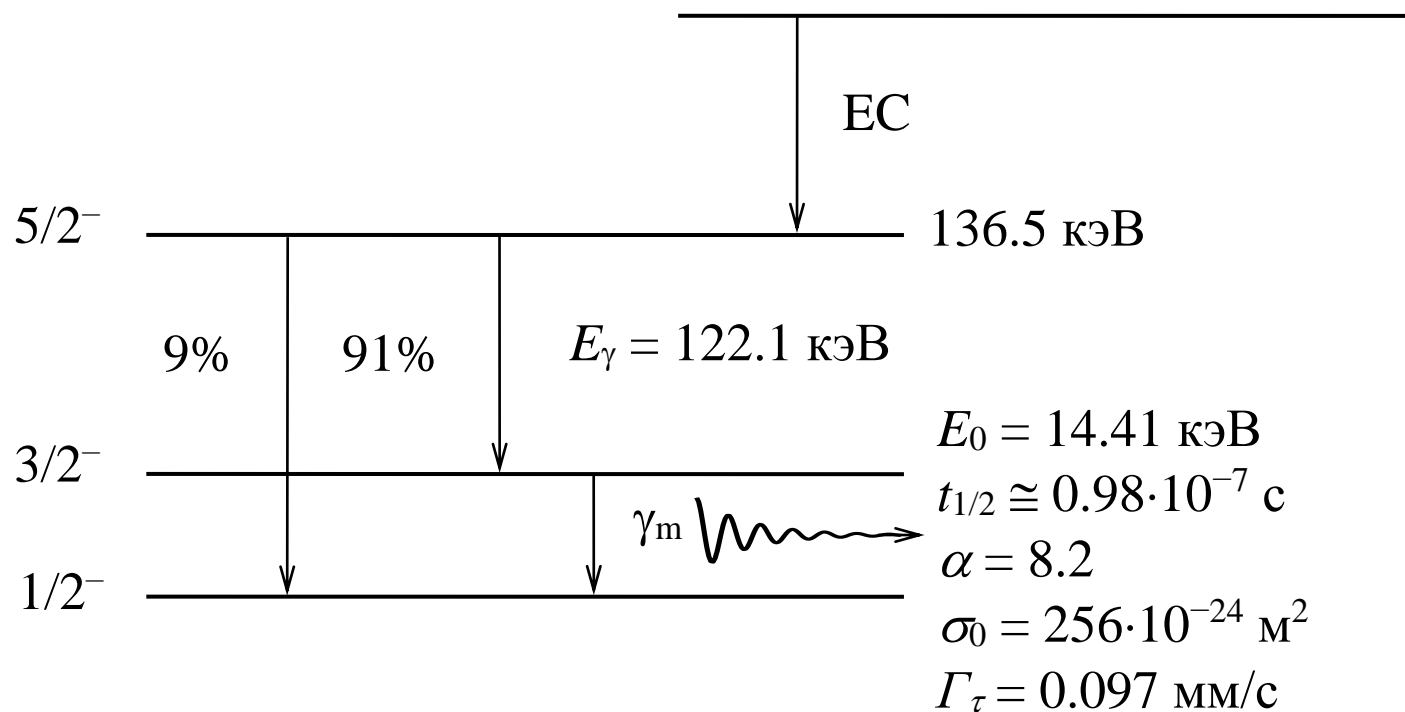
$^{57}_{27}\text{Co}$  ( $T_{1/2} = 270$  дн.)

$$\mu_{\text{ex}} = -0.155 \mu_{\text{n}}$$

$$Q_{\text{ex}} = +0.14 \text{ б}$$

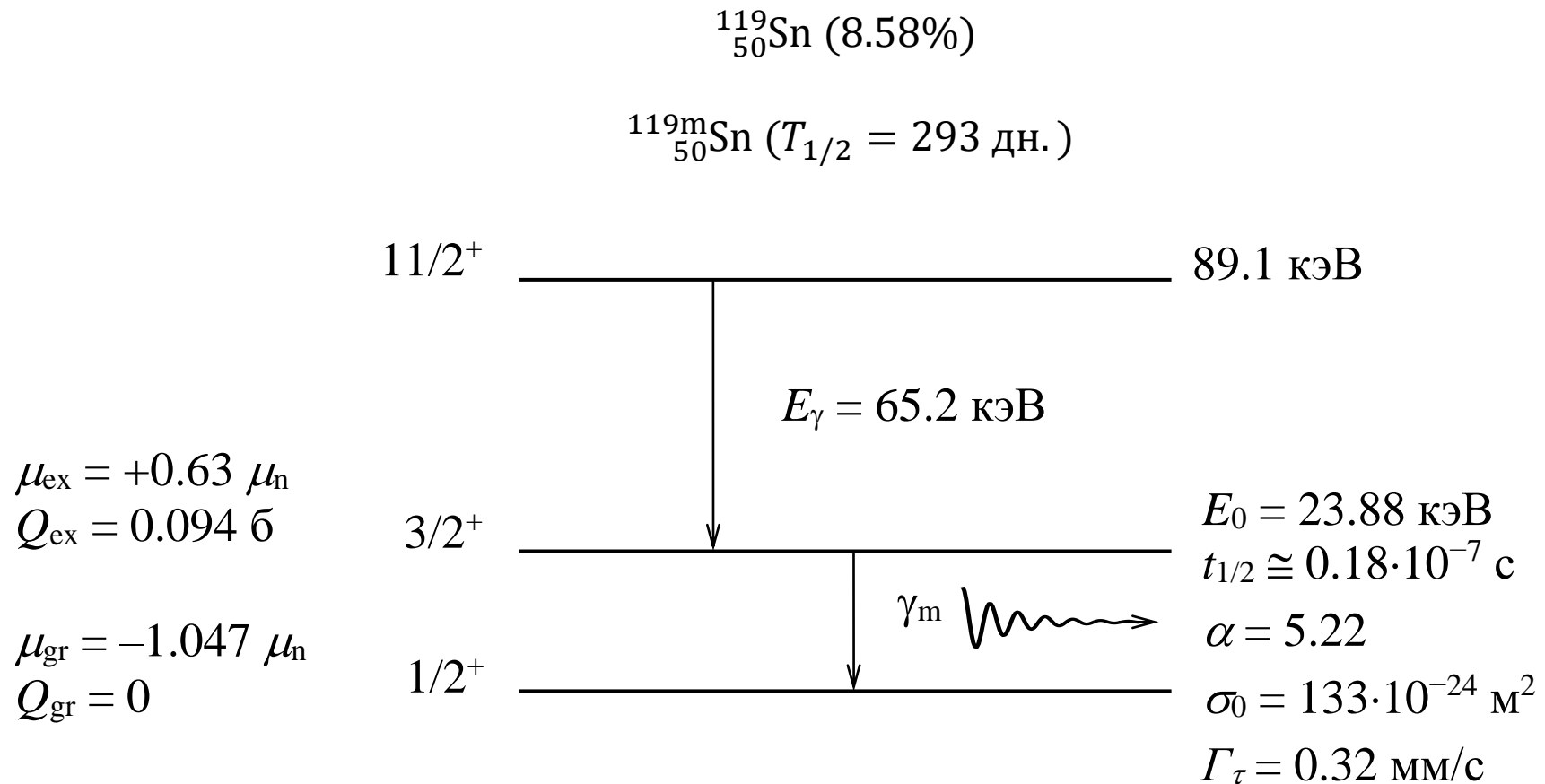
$$\mu_{\text{gr}} = +0.091 \mu_{\text{n}}$$

$$Q_{\text{gr}} = 0$$



# Примеры схем ядерных превращений

## Схема ядерных превращений для мессбауэровского изотопа $^{119}\text{Sn}$ (мессбауэровский источник – ядра $^{119\text{m}}\text{Sn}$ )





# Примеры схем ядерных превращений

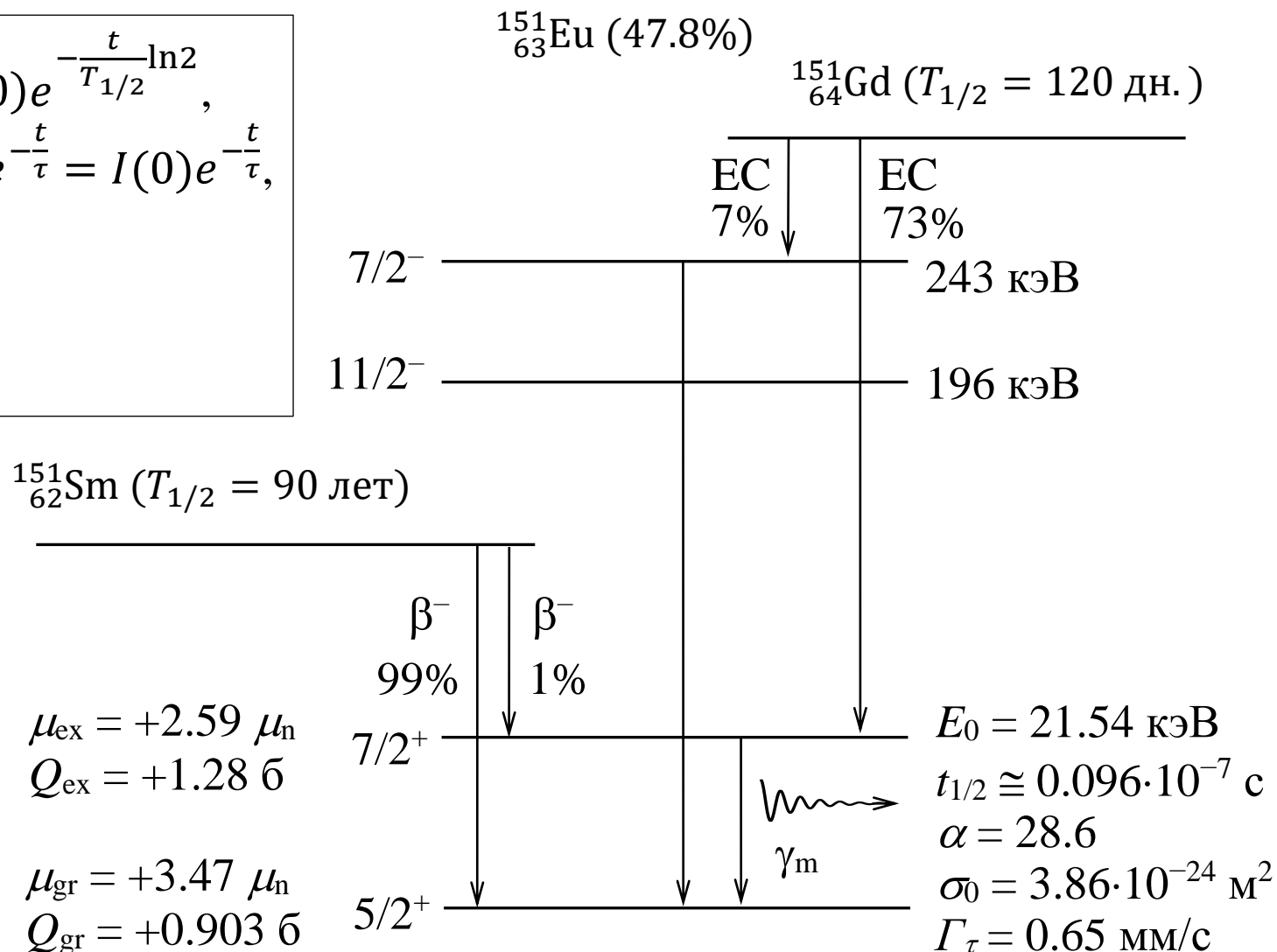
## Схема ядерных превращений для мессбауэровского изотопа $^{151}\text{Eu}$ (мессбауэровские источники – ядра $^{151}\text{Sm}$ и $^{151}\text{Gd}$ )

$$N(t) = N(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = N(0)e^{-\frac{t}{T_{1/2}} \ln 2},$$

$$I(t) = -\frac{dN}{dt} = \frac{N(0)}{T_{1/2}} \ln 2 e^{-\frac{t}{\tau}} = I(0)e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$\int_0^{\infty} I(t) dt = N(0). !$$

$$I(0) = \frac{N(0)}{T_{1/2}} \ln 2 !?$$



## §5. Основные характеристики мессбауэровских изотопов

**Период полураспада материнского ядра –  $T_{1/2}$**

(от 1.7 мин для  $^{57}\text{Mn} \rightarrow ^{57}\text{Fe} + \beta^-$  до  $1.6 \cdot 10^7$  лет для  $^{129}\text{I} \rightarrow ^{129}\text{Xe} + \beta^-$ ); чем больше его значение, тем дольше можно использовать данный мессбауэровский источник, однако при том же числе материнских ядер будет меньше активность источника.

**Процентное содержание мессбауэр. изотопа в естественной смеси изотопов –  $c$**

(от 0.012% для  $^{40}\text{K}$  до 100% для  $^{197}\text{Au}$ ); чем больше его значение, тем больше величина наблюдаемого эффекта Мессбауэра.

**Энергия мессбауэровского перехода –  $E_0$**

(от 6.25 кэВ для  $^{181}\text{Ta}$  до 155 кэВ для  $^{188}\text{Os}$ ); чем меньше ее значение, тем больше максимальное сечение резонансного поглощения, а также вероятность эффекта Мессбауэра.

**Период полураспада возбужденного состояния мессбауэровского изотопа –  $t_{1/2}$**

(от  $10^{-11}$  с для  $^{187}\text{Re}$  до 44 с для  $^{107}\text{Ag}$ ); чем больше его значение, тем уже резонансная линия и выше разрешение в мессбауэровском спектре.

**Максимальное сечение резонансного поглощения –  $\sigma_0$**

(от  $0.71 \cdot 10^{-24}$  м<sup>2</sup> для  $^{234}\text{U}$  до  $256 \cdot 10^{-24}$  м<sup>2</sup> для  $^{57}\text{Fe}$ ); чем больше его значение, тем больше величина наблюдаемого эффекта Мессбауэра.

**Коэффициент конверсии –  $\alpha$**

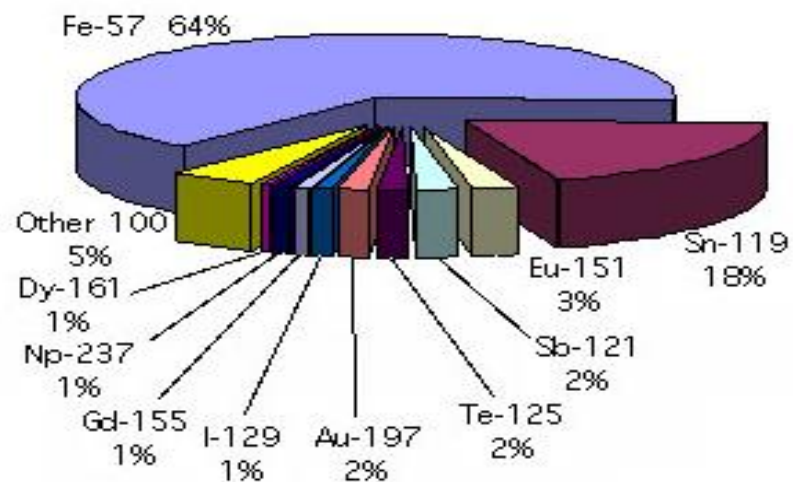
(от 0.12 для  $^{61}\text{Ni}$  до 660 для  $^{238}\text{U}$ ); чем больше его значение, тем менее интенсивен источник "мессбауэровских"  $\gamma$ -квантов и тем эффективнее регистрировать эффект Мессбауэра с помощью электронов конверсии.

## §5. Основные характеристики мессбауэровских изотопов

### Основные характеристики наиболее часто используемых в эксперименте мессбауэровских изотопов.

Мессб. изотоп	Матер. ядро	$T_{1/2}$	$c, \%$	$E_0, \text{кэВ}$	$t_{1/2}, 10^{-7} \text{с}$	$\sigma_0, 10^{-24} \text{м}^2$	$\alpha$	$\Gamma_\tau, \text{мм/с}$
$^{57}\text{Fe}$	$^{57}\text{Co}$	270 дн	2.14	14.41	0.98	256	8.2	0.097
$^{119}\text{Sn}$	$^{119\text{m}}\text{Sn}$	293 дн	8.58	23.88	0.18	133	5.2	0.32
$^{151}\text{Eu}$	$^{151}\text{Sm}$	90 лет	47.8	21.54	0.097	3.86	28.6	0.65
	$^{151}\text{Gd}$	120 дн						

Publications by Isotope



## Оценка физических величин

**Оценка** энергии отдачи  $R$  в случае свободного и покоящегося ядра  $^{57}\text{Fe}$  массы  $m = 57$  а.е.м. (1 а.е.м. =  $1.66 \cdot 10^{-27}$  кг) и энергии мессбауэровского перехода  $E_0 = 14.4$  кэВ (1 эВ =  $1.6 \cdot 10^{-19}$  Дж,  $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$  Дж·с):

$$R = \frac{E_0^2}{2mc^2} \cong \frac{(14.4 \cdot 10^3)^2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 57 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} \cong 2 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}. \quad \frac{R}{\Gamma_\tau} \cong \frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}}{5 \cdot 10^{-9} \text{ эВ}} = 4 \cdot 10^5.$$

**Оценка** интегральной ширины  $D$  в случае ядер  $^{57}\text{Fe}$  ( $\Gamma_\tau \cong 5 \cdot 10^{-9}$  эВ,  $R \cong 2 \cdot 10^{-3}$  эВ), если учесть  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К, то:

$$\begin{aligned} \text{для } T = 300 \text{ К} - D &= 2 \sqrt{k_B T R} = 2 \sqrt{\frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1.6 \cdot 10^{-19}}} \cong 1.4 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}, \quad D \sim R, \quad \frac{D}{\Gamma_\tau} \sim 3 \cdot 10^6; \\ \text{для } T = 4 \text{ К} - D &= 2 \sqrt{k_B T R} = 2 \sqrt{\frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1.6 \cdot 10^{-19}}} \cong 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}, \quad D \sim R, \quad \frac{D}{\Gamma_\tau} \sim 3 \cdot 10^5. \end{aligned}$$