Материалы к Главе II

Свойства преобразования Фурье

1. Суперпозиция импульсов

Рассмотрим любую линейную комбинацию функций $\{f_j(t)\}$:

$F(t) = \sum_j \alpha_j f_j(t)$, где α_j – постоянные во времени величины.

В силу линейности преобразования Фурье получим:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_j \alpha_j f_j(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \sum_j \alpha_j \int_{-\infty}^{\infty} f_j(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \sum_j \alpha_j f_j(i\omega).$$

Фурье-образ $F(i\omega)$ линейной комбинации $F(t)$ функций $\{f_j(t)\}$ равен той же линейной комбинации Фурье-образов этих функций.

2. Смещение импульса во времени

Рассмотрим функцию $f(t)$, смещенную назад или вперед во времени на t_0: $F(t) = f(t \pm t_0)$.

Воспользовавшись заменой переменных $\tau = t \pm t_0$ ($\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t$), получим:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \pm t_0) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} e^{\pm i\omega t_0} \mathrm{d}\tau = e^{\pm i\omega t_0} f(i\omega) = f(\omega) e^{-i\left(\phi(\omega) \mp \omega t_0\right)}.$$

Как видим, изменяется спектральная фаза $\Phi(\omega)$ на $\mp\omega t_0$, а спектральная амплитуда (амплитудный спектр) $F(\omega)$ и спектральная плотность (частотный спектр) $\left|F(i\omega)\right|^2$ остаются неизменными:

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega) \mp \omega t_0, \qquad F(\omega) = \left|F(i\omega)\right| = \left|f(i\omega)\right| = f(\omega), \qquad \left|F(i\omega)\right|^2 = \left|f(i\omega)\right|^2.$$

Свойства преобразования Фурье

3. Изменение масштаба времени

Рассмотрим функцию $f(t)$ с измененным масштабом времени, сжатую в $\alpha \geq 0$ или растянутую в $1/\alpha$ раз с возможной инверсией времени:

$F(t) = f(\pm\alpha t)$.

Воспользовавшись заменой переменных $\tau = \pm\alpha t$ ($\mathrm{d}\tau = \pm\alpha \mathrm{d}t$), получим:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\pm\alpha t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \pm\frac{1}{\alpha}\int_{\mp\infty}^{\pm\infty} f(\tau)e^{-i\left(\pm\frac{\omega}{\alpha}\right)\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\left(\pm\frac{\omega}{\alpha}\right)\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\alpha} f\left(\pm i\frac{\omega}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} f\left(\pm\frac{\omega}{\alpha}\right)e^{-i\varphi\left(\pm\frac{\omega}{\alpha}\right)},$$

$$F(\omega) = \left|F(i\omega)\right| = \frac{1}{\alpha} f\left(\pm\frac{\omega}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{\omega}{\alpha}\right),$$

$$\left|F(i\omega)\right|^2 = \frac{1}{\alpha^2} f^2\left(\frac{\omega}{\alpha}\right),$$

$$\Phi(\omega) = \varphi\left(\pm\frac{\omega}{\alpha}\right) = \pm\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Как видим, масштаб частот амплитудного спектра $F(\omega)$, спектра фаз $\Phi(\omega)$ и частотного спектра $\left|F(i\omega)\right|^2$ изменяется обратно пропорционально изменению временного масштаба. Характерная ширина спектров меняется обратно пропорционально изменению длительности импульса. При этом не меняется форма спектров. В частности, уменьшение (увеличение) длительности импульса в α раз приводит к увеличению (уменьшению) ширины спектров амплитуды, фазы и спектральной плотности (частотного спектра) также в α раз. В случае инверсии времени инвертируется (или, что то же самое, меняет знак) спектр фаз.

Свойства преобразования Фурье

4. Соотношение между длительностью импульса и шириной спектра

Длительность импульса Δt – интервал времени, в течение которого импульс (функция $f(t)$) существенно отличается от нуля.

Ширина спектра $\Delta\omega$ – интервал частот, на котором спектральная амплитуда $f(\omega)$ или спектральная плотность $\left|f(i\omega)\right|^2$ (амплитудный $f(\omega)$ или частотный $\left|f(i\omega)\right|^2$ спектр) существенно отличается от нуля.

В этих определениях имеется неопределенность. В зависимости от точного определения этих понятий соотношение между Δt и $\Delta\omega$ меняется, и универсального соотношения не существует. Однако, существует универсальная закономерность – **ширина спектра** $\Delta\omega$ **обратно пропорциональна длительности импульса** Δt:

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t}.$$

Эта закономерность имеет общий характер и выражает одно из основных свойств преобразования Фурье. В частном случае неизменности формы импульса или формы его частотного спектра свойство 3. Изменение масштаба времени, по существу, является доказательством данного свойства.

В общем случае, когда меняется форма импульса и частотного спектра, можно воспользоваться интегральными определениями длительности импульса Δt и ширины спектра $\Delta\omega$:

$$\Delta t \equiv \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t}{f(t=0)},$$

$$\Delta\omega \equiv \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)\mathrm{d}\omega}{f(i\omega=0)} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\omega)\mathrm{d}\omega}{a(0)}.$$

Здесь учтено, что мнимая часть $b(\omega)$ комплексной спектральной амплитуды $f(i\omega)$ является функцией нечетной. Найдем произведение длительности импульса на ширину спектра, воспользовавшись преобразованиями Фурье:

$$\Delta t \cdot \Delta\omega = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t}{f(t=0)} \cdot \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)\mathrm{d}\omega}{f(i\omega=0)} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)\mathrm{d}\omega} \cdot \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)\mathrm{d}\omega}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t} = 2\pi.$$

В результате использования интегральных определений получим точное соотношение:

$\Delta t \cdot \Delta\omega = 2\pi$ или $\Delta\omega = \dfrac{2\pi}{\Delta t}.$

Свойства преобразования Фурье

5. Смещение спектра по частоте

Рассмотрим импульс длительностью $\Delta t >> T_0$ в виде квазигармонической (модулированной во времени) функции с несущей частотой ω_0 (периодом T_0):

$F(\mathrm{t}) = f(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$.

Воспользовавшись формулой Эйлера, получим: $F(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t}\mathrm{d}t =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\right)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big[f\big(i(\omega-\omega_0)\big) + f\big(i(\omega+\omega_0)\big)\Big].$$

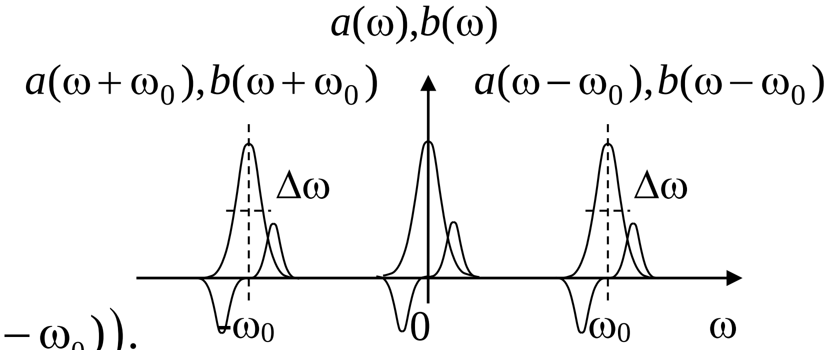
Поскольку длительность импульса $\Delta t >> T_0$, то: $\Delta\omega \sim 2\pi / \Delta t << 2\pi / T_0 = \omega_0$.

<u>Для физически осмысленного интервала частот</u> $\omega \geq 0$:

$$A(\omega) = \frac{1}{2}\left[a(\omega-\omega_0) + a(\omega+\omega_0)\right] \cong \frac{1}{2}a(\omega-\omega_0),$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2}\left[b(\omega-\omega_0) + b(\omega+\omega_0)\right] \cong \frac{1}{2}b(\omega-\omega_0),$$

$$F(i\omega) = A(\omega) - iB(\omega) \cong \frac{1}{2}\left[a(\omega-\omega_0) - ib(\omega-\omega_0)\right] = \frac{1}{2} f\big(i(\omega-\omega_0)\big).$$



Следовательно, при $\omega \geq 0$ комплексная спектральная амплитуда $F(i\omega)$, спектральные амплитуда $F(\omega)$, плотность $\left|F(i\omega)\right|^2$ и фаза $\Phi(\omega)$ квазигармонической волны по форме такие же, как у меняющейся со временем амплитуды $f(t)$, только смещены они на несущую частоту ω_0:

$$F(i\omega) \cong \frac{1}{2} f\big(i(\omega-\omega_0)\big), \quad F(\omega) \cong \frac{1}{2} f(\omega-\omega_0), \quad \left|F(i\omega)\right|^2 \cong \frac{1}{4}\left| f\big(i(\omega-\omega_0)\big)\right|^2, \quad \Phi(\omega) = \varphi(\omega-\omega_0).$$

Свойства преобразования Фурье

6. Теорема Планшереля

В 1910 г. швейцарский математик Мишель Планшерель доказал интегральную теорему, связывающую квадрат модуля произвольной функции с ее спектральной плотностью:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(i\omega)|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |f(i\omega)|^2 \mathrm{d}\omega.$$

Для доказательства теоремы воспользуемся преобразованиями Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} f(i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\right)^* \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(i\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(i\omega) f^*(i\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(i\omega)|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |f(i\omega)|^2 \mathrm{d}\omega.$$

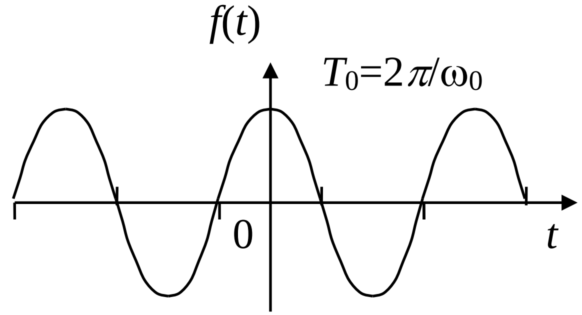
Заметим, что, поскольку преобразования Фурье являются линейными интегральными операторами, то в общем случае **функция времени может быть комплексной** $\hat{f}(i\omega)$, и для нее также будут справедливы эти преобразования:

$$\hat{f}(t) = f_1(t) + if_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

$$\hat{f}(i\omega) = f_1(i\omega) + if_2(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t + i\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Примеры преобразования Фурье

Гармоническое колебание

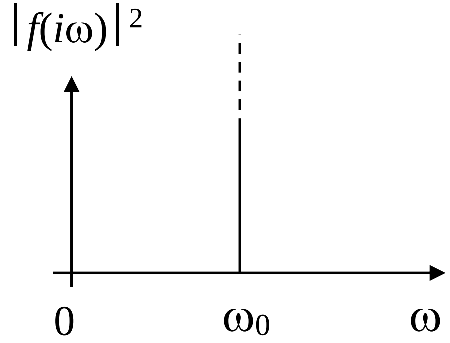


Пусть $f(t) = f_0 \cos(\omega_0 t)$, тогда:

$$f(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = f_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \right) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t =$$

$$= \pi f_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}}{2\pi} \right) \mathrm{d}t = \pi f_0 \big(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\big).$$

При $\omega \ge 0$ $f(i\omega) = \pi f_0 \delta(\omega - \omega_0)$,



где – $\delta(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos(\omega t) \mathrm{d}t$ – **дельта-функция.**

Так как $f(t)$ – четная функция, то функция $f(i\omega)$ – вещественная.

Свойства дельта-функции:

$\delta(\omega \Rightarrow 0) \Rightarrow \infty$, $\delta(\omega \ne 0) = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) \mathrm{d}\omega = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \delta(\omega - \Omega) \mathrm{d}\omega = f(\Omega)$.

Заметим, что дельта-функция размерная – $[\delta(\omega)] = [1/\omega]$!

Прямоугольный импульс и цуг волн

$$f(t)=\begin{cases} f_0 \text{ при } t\in[-\tau/2,\tau/2] \\ 0 \quad \text{при } t\notin[-\tau/2,\tau/2]\end{cases}.$$

$$f(i\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = f_0\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = f_0\,\frac{e^{-i\omega\tau/2}-e^{i\omega\tau/2}}{-i\omega}=$$

$$= f_0\tau\,\frac{-2i\sin(\omega\tau/2)}{-i\omega\tau} = f_0\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right),$$

$$\left|f(i\omega)\right|^2 = (f_0\tau)^2\cdot \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

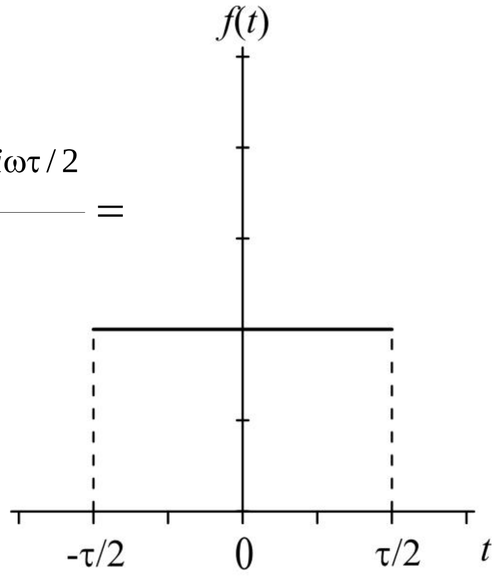
$$\mathrm{sinc}(\alpha)\equiv\frac{\sin\alpha}{\alpha},\ \mathrm{sinc}(\alpha)=0 \text{ при } \alpha = k\pi,\ k = 1,2,3,\ldots$$

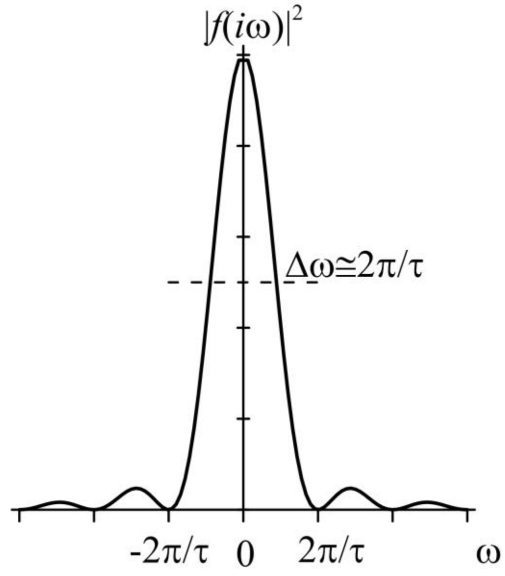
$$\mathrm{sinc}(\alpha)\xrightarrow[\alpha\to 0]{}1,\ \mathrm{sinc}(\alpha)\xrightarrow[\alpha\to\infty]{}0.$$

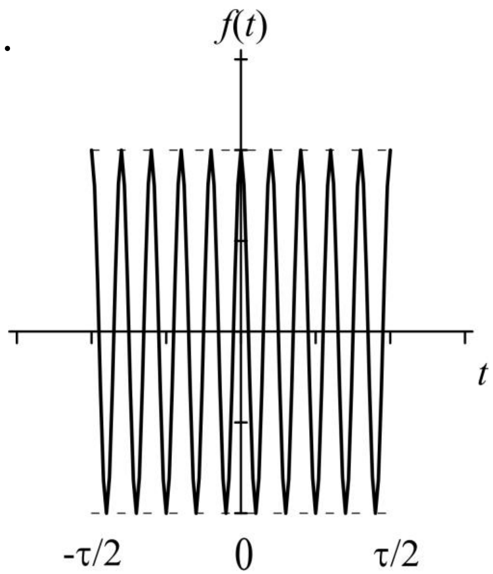
$$f(t)=\begin{cases} f_0\cdot\cos(\omega_0 t) \text{ при } t\in[-\tau/2,\tau/2] \\ 0 \qquad\qquad\quad \text{при } t\notin[-\tau/2,\tau/2]\end{cases}.$$

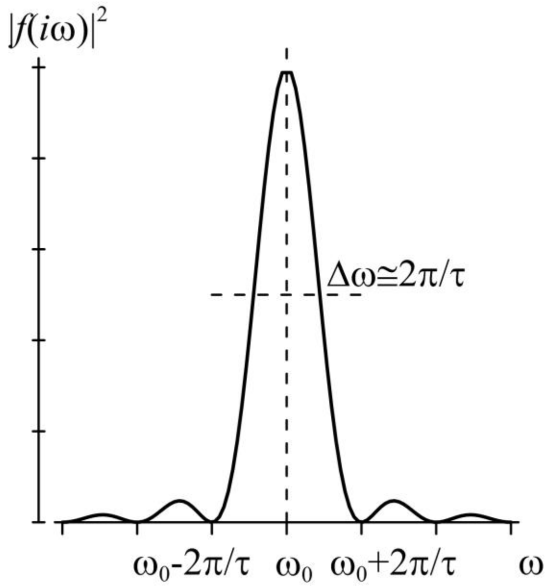
При $\tau >> T_0$:

$$\left|f(i\omega)\right|^2 = \frac{(f_0\tau)^2}{4}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right).$$









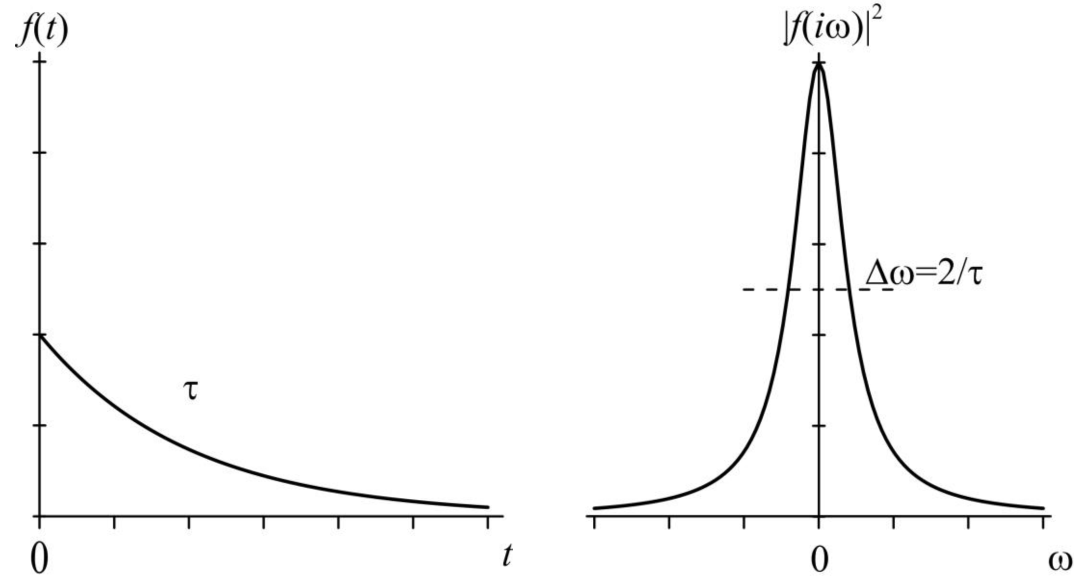
Экспоненциальный импульс и слабозатухающая волна

$$f(t) = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = f_0 e^{-\delta t} \text{ при } t \geq 0.$$

$$f(i\omega) = \int_0^\infty f_0 e^{-\delta t} e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = f_0 \cdot \left.\frac{e^{-(\delta + i\omega)t}}{-(\delta + i\omega)}\right|_0^\infty =$$

$$= f_0 \cdot \frac{1}{\delta + i\omega} = f_0 \frac{\delta - i\omega}{\delta^2 + \omega^2}.$$

$$\left|f(i\omega)\right|^2 = \frac{f_0^2}{\delta^2} \cdot \frac{\delta^2}{\delta^2 + \omega^2} = \left(f_0 \tau\right)^2 \cdot L\left(\frac{\omega}{\delta}\right).$$

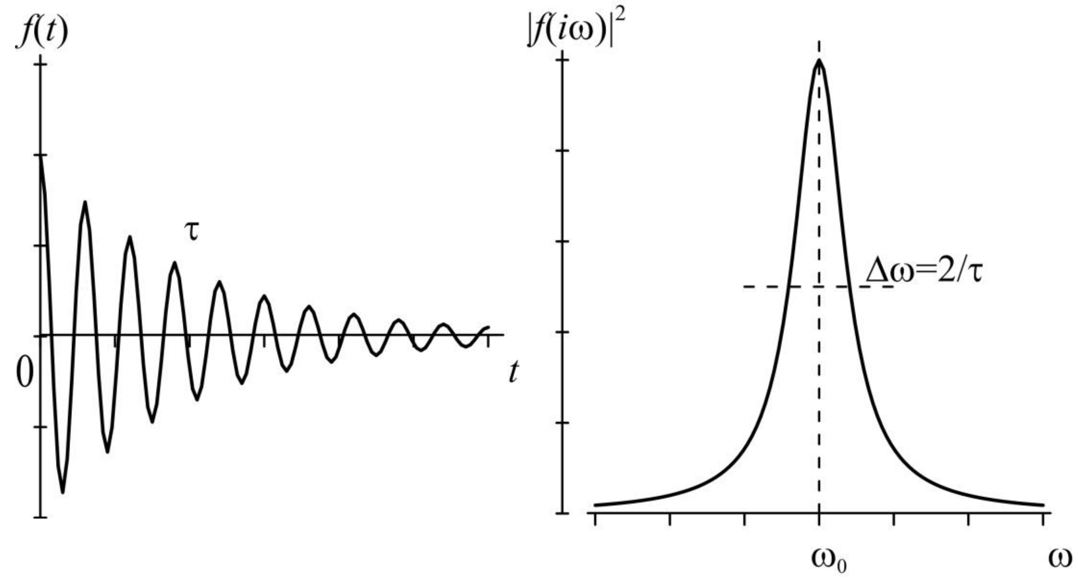


$$L(\omega) \equiv \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$f(t) = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \cos\omega_0 t = f_0 e^{-\delta t} \cdot \cos\omega_0 t$$

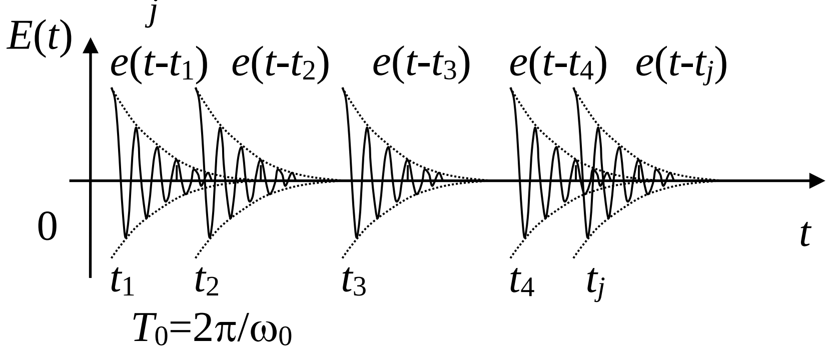
при $t \geq 0$ и $\omega_0 >> \delta$ ($\tau >> T_0$).

$$\left|f(i\omega)\right|^2 = \frac{f_0^2}{4} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2} = \frac{\left(f_0 \tau\right)^2}{4} L\left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta}\right).$$



Спектральная плотность интенсивности непрерывного стационарного излучения совокупности случайно разбросанных во времени одинаковых световых импульсов

$E(t) = \sum_j e(t - t_j)$, t_j – начало j-го импульса с длительностью $\tau \gg T_0$.



$$E_{\text{н}}(t) = \begin{cases} E(t) \text{ при } t \in [0, \tau_{\text{н}}], \\ 0 \quad \text{при } t \notin [0, \tau_{\text{н}}]. \end{cases}$$

Фурье-образ напряженности $E_{\text{н}}(t)$ поля излучения за время наблюдения $\tau_{\text{н}} \gg \tau$:

$$E_{\text{н}}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\text{н}}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\tau_{\text{н}}} E(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\tau_{\text{н}}} \sum_j e(t - t_j) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_{\text{н}}} \int_{-\infty}^{\infty} e(t - t_j) e^{-i\omega t} dt = \sum_{j=1}^{N_{\text{н}}} e^{-i\omega t_j} e(i\omega) = e(i\omega) \sum_{j=1}^{N_{\text{н}}} e^{-i\omega t_j},$$

где $N_{\text{н}}$ – число зарегистрированных импульсов за время $\tau_{\text{н}}$.

Спектральная плотность в этом случае равна:

$$\left| E_{\text{н}}(i\omega) \right|^2 = E_{\text{н}}(i\omega) E_{\text{н}}^*(i\omega) = \left| e(i\omega) \right|^2 \sum_{j,k=1}^{N_{\text{н}}} e^{-i\omega\left(t_j - t_k\right)}.$$

При устремлении времени наблюдения $\tau_{\text{н}}$ к бесконечности $(\tau_{\text{н}} \gg \tau)$ получим спектральную плотность интенсивности всего излучения:

$$S(\omega) = \lim_{\tau_{\text{н}} \to \infty} S_{\text{н}}(\omega) = \lim_{\tau_{\text{н}} \to \infty} \frac{\left| E_{\text{н}}(i\omega) \right|^2}{\pi \tau_{\text{н}}} = \lim_{\tau_{\text{н}} \to \infty} \frac{\left| e(i\omega) \right|^2 \sum_{j,k=1}^{N_{\text{н}}} e^{-i\omega\left(t_j - t_k\right)}}{\pi \tau_{\text{н}}} =$$

$$= \frac{\left| e(i\omega) \right|^2}{\pi} \lim_{\tau_{\text{н}} \to \infty} \frac{N_{\text{н}} + \sum_{j \neq k}^{N_{\text{н}}} e^{-i\omega\left(t_j - t_k\right)}}{\tau_{\text{н}}} = n\tau \frac{\left| e(i\omega) \right|^2}{\pi \tau} = n\tau \cdot s(\omega).$$

Здесь n – **средняя частота следования импульсов**.

Таким образом, <u>спектральная плотность интенсивности $S(\omega)$ случайно разбросанных во времени одинаковых световых импульсов пропорциональна спектральной плотности $s(\omega)$ отдельного импульса.</u>