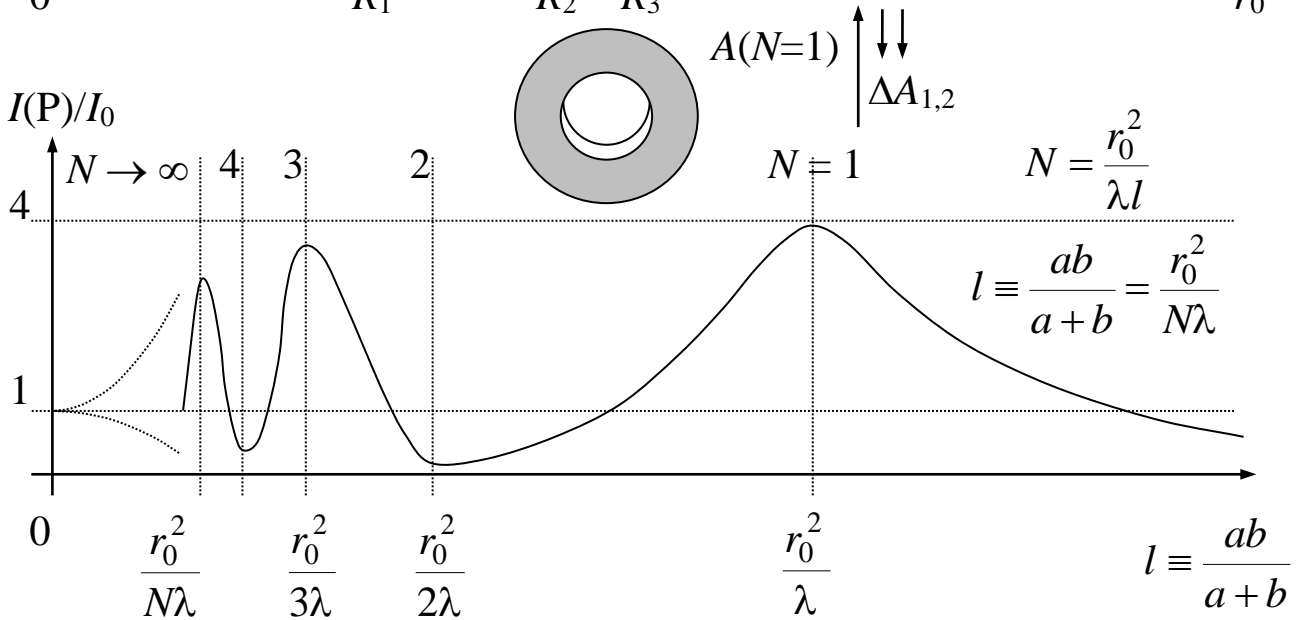
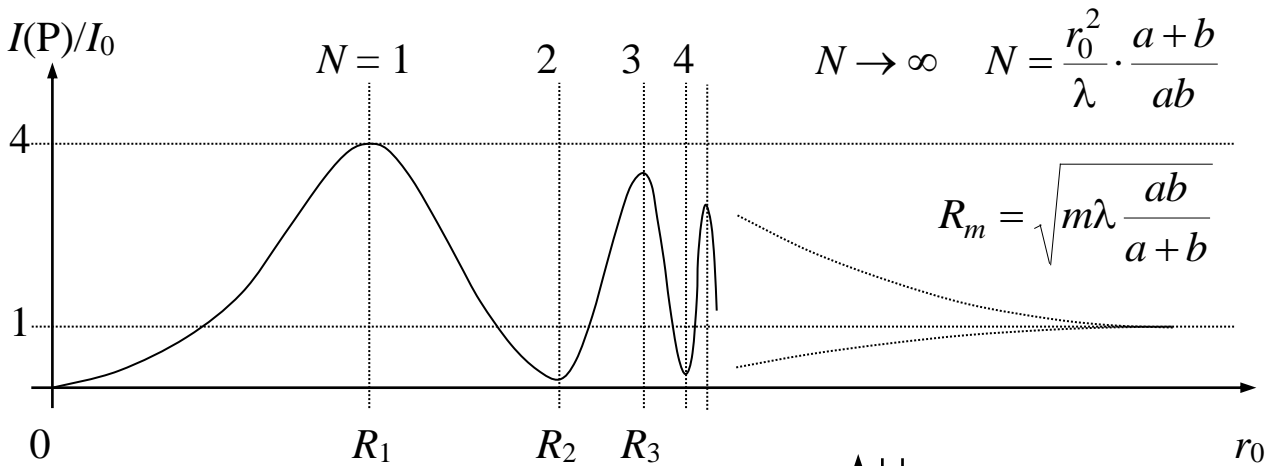
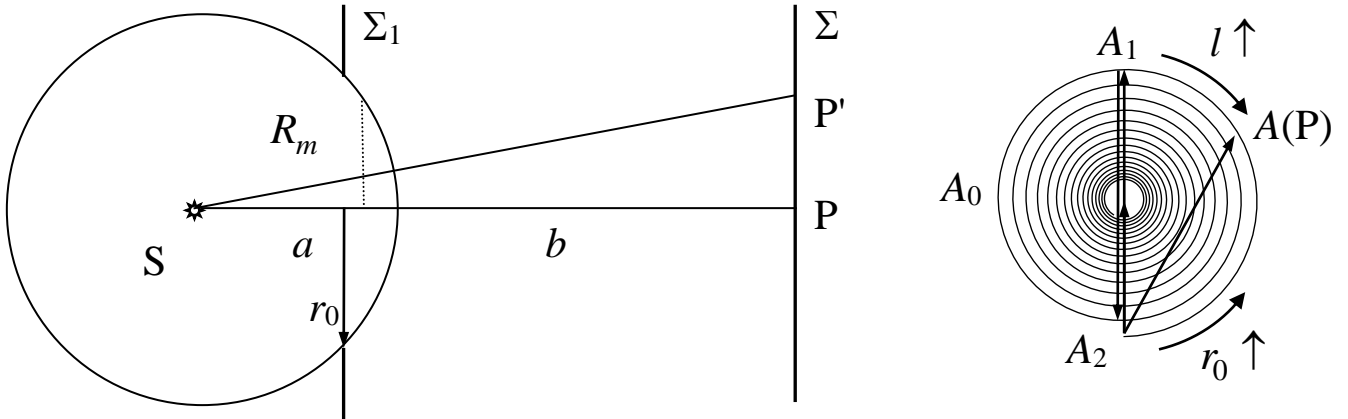


# Материалы к Главе IV

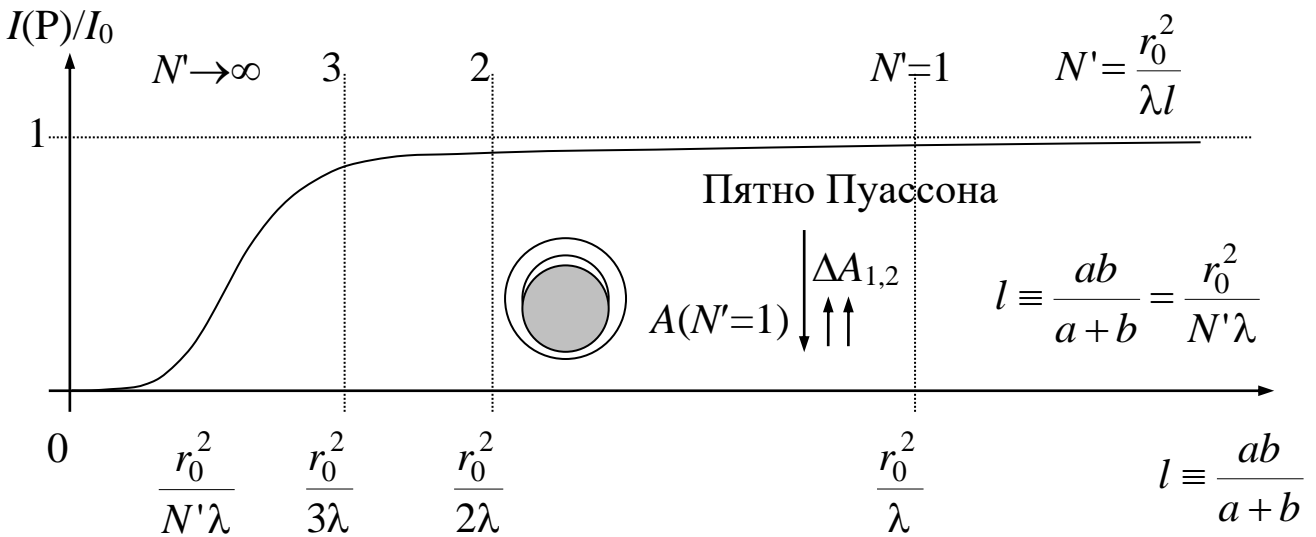
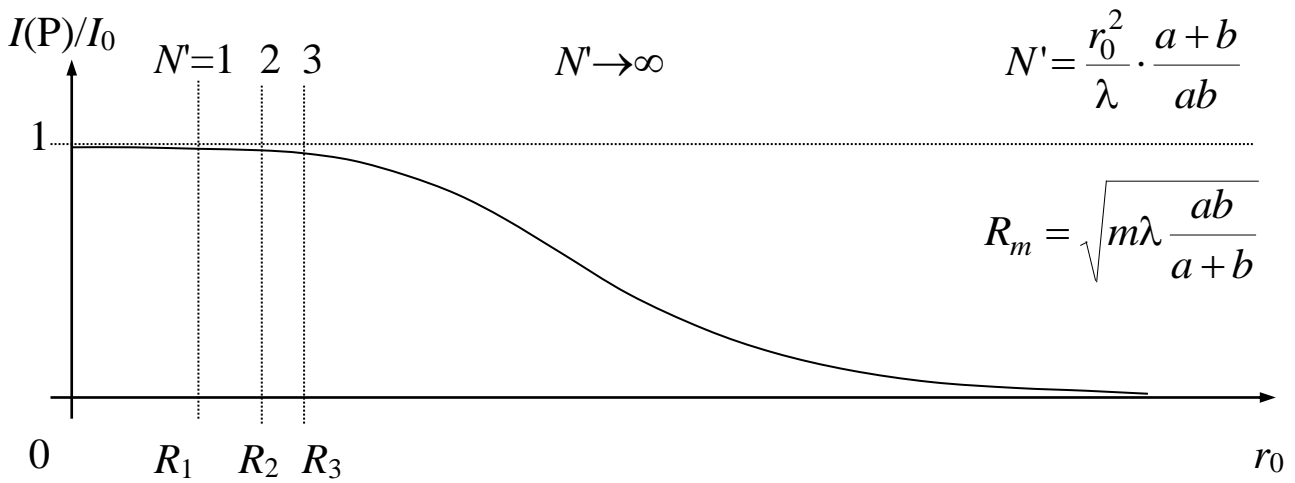
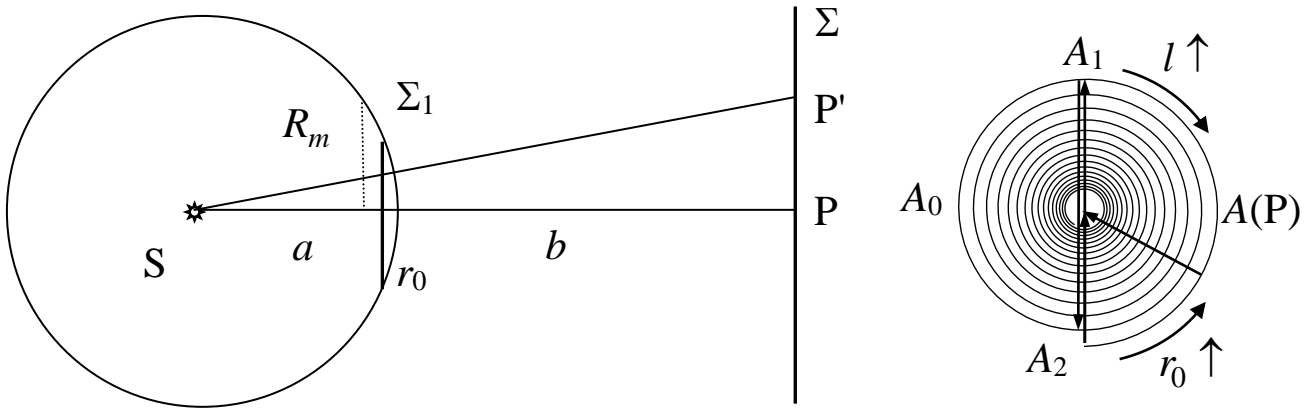
## Простейшие дифракционные задачи

### Дифракция на круглом отверстии



$P \perp SP: |A_1| \uparrow, |A_2| \downarrow \Rightarrow |A(N=1)| \downarrow$

# Дифракция на круглом экране. Пятно Пуассона



$P \perp SP: |A_1| \uparrow, |A_2| \downarrow \Rightarrow |A(P)| \downarrow$

# Дифракция на крае полубесконечного экрана и щели. Спираль Корню (клотоида)

**Зона** – сферический двуугольник – лунка:  $A_{\Sigma_0} - const(\Sigma_0)$ ,  $\Delta\rho_m^{\min} = \lambda/2$ ;

(при  $a \rightarrow \infty$  – плоская полоса – **зона Шустера**):  $d_m = \sqrt{m\lambda ab / (a+b)}$ .

При  $a \sim b \sim 4$  м,  $\lambda \sim 0.5 \cdot 10^{-6}$  м:

$$d_m \sim \sqrt{m} \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

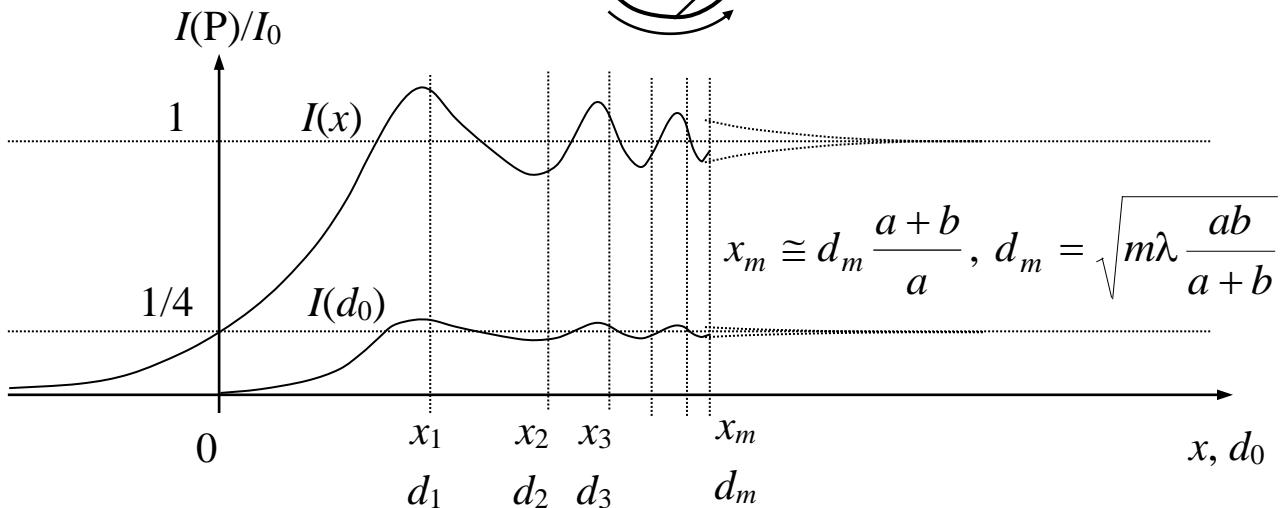
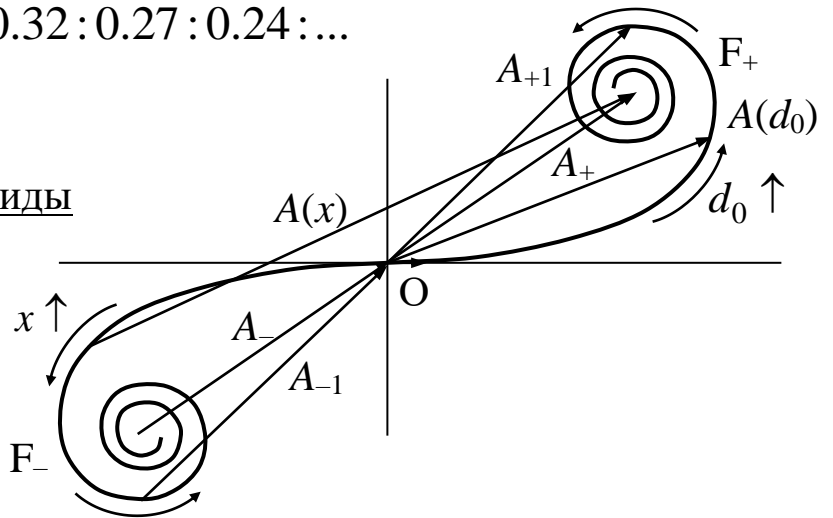
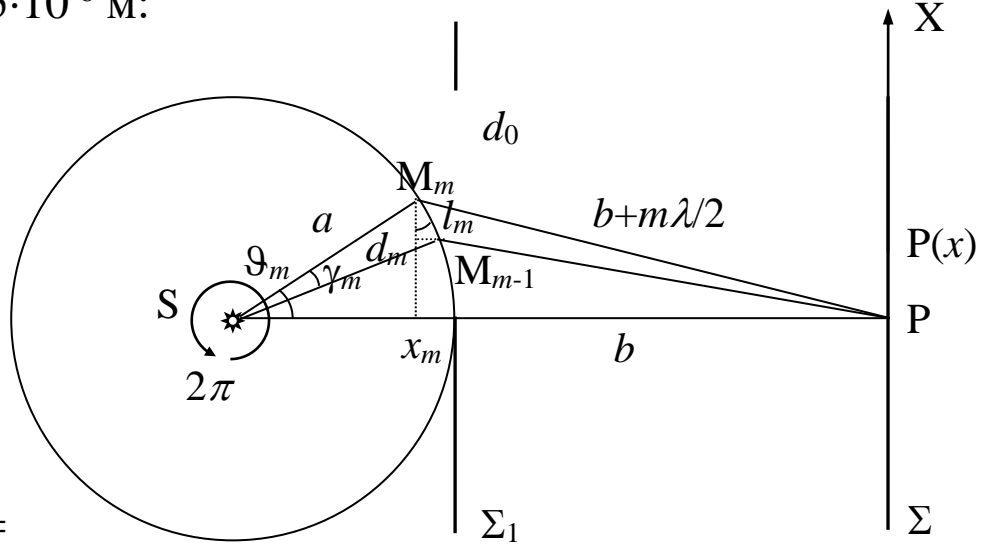
$$x_m \sim m \cdot 0.125 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_m &= \frac{a - x_m}{a} \cong \\ &\cong \frac{d_m - d_{m-1}}{l_m} \cong 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{4\pi a^2}{2\pi} \gamma_m = 2a^2 \frac{l_m}{a} = \\ &= 2al_m \cong 2a(d_m - d_{m-1}) \sim (\sqrt{m} - \sqrt{m-1}) = \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}. \end{aligned}$$

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_4 : \sigma_5 : \dots = 1 : 0.41 : 0.32 : 0.27 : 0.24 : \dots$$

O – центр, F<sub>+</sub>, F<sub>-</sub> – полюса клотоиды



## Условия пространственно-временной когерентности

При рассмотрении дифракции от экранов (интерференции от вторичных источников открытой светящейся поверхности) нужна достаточная степень пространственно-временной когерентности. Найдем условия, при которых в полной мере необходимо учитывать когерентность вторичных источников в случае круглого отверстия в непрозрачном экране.

1. Пространственная когерентность. Для когерентного взаимодействия всех  $N$  зон Френеля необходимо, чтобы диаметр отверстия  $d_0 = 2r_0$  (максимальное расстояние между вторичными источниками) был меньше радиуса (ширины) когерентности  $d_k$ :  $d_0 = 2r_0 < d_k = a\lambda / s$ . Или, что то же самое, реальный источник, состоящий из независимо излучающих элементарных источников, должен быть достаточно малым:  $s < a\lambda / d_0$ . При  $\lambda = 0.6 \cdot 10^{-6}$  м,  $a = 4$  м и  $r_0 = 1$  мм  $s < 1$  мм.

2. Временная когерентность. Для когерентного взаимодействия всей открытой светящейся поверхности при формировании светового возмущения в центре экрана  $\Sigma$  максимальная разность хода от центра и краев отверстия должна быть меньше длины когерентности:

$$N \frac{\lambda}{2} < l_k = v\tau_k \cong v \frac{2\pi}{\Delta\omega} = v \frac{2\pi T}{\Delta\omega T} = \lambda \frac{\omega}{\Delta\omega}, \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} < \frac{2}{N} = 2 \frac{\lambda}{r_0^2} \cdot \frac{ab}{a+b}.$$

При  $\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6}$  м,  $a = b = 4$  м и  $r_0 = 1$  мм  $\Delta\omega/\omega < 2$ . В данном случае возможны наблюдение и расчет дифракции в центре экрана даже в белом свете.

Для наблюдения дифракционной картины на расстоянии  $x$  от центра экрана  $\Sigma$  разность хода  $\beta x$  для крайних вторичных волн ( $\beta$  – угол сходимости интерферирующих волн) должна быть меньше длины когерентности  $l_k$ :  $\beta x < l_k \cong \lambda \frac{\omega}{\Delta\omega}$ ,  $\frac{d_0}{b} x < \lambda \frac{\omega}{\Delta\omega}$ ,  $\frac{\Delta\omega}{\omega} < \frac{b\lambda}{d_0 x}$ .

При  $x = 1$  см  $\frac{\Delta\omega}{\omega} < 0.1$ . В данном случае наблюдение и расчет дифракции в белом свете невозможны, необходим другой источник света с большим временем  $\tau_k$  (длиной  $l_k$ ) когерентности (с меньшей шириной спектра  $\Delta\omega$ ), например, ртутная лампа или лазер.

## Уравнение Гельмгольца и интегральная теорема Гельмгольца-Кирхгофа

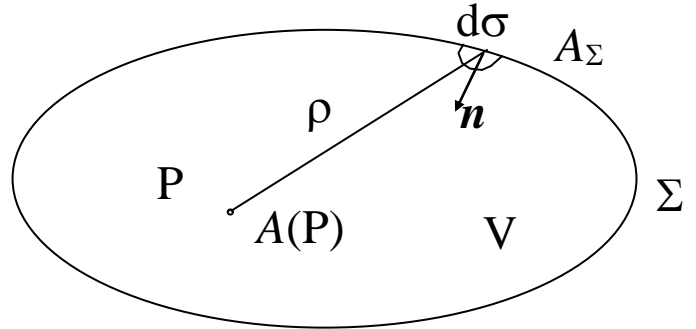
Рассмотрим решение волнового уравнения для однородной изотропной среды  $\frac{\partial^2 \hat{E}(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta \hat{E}(t, \mathbf{r})$ , в виде монохроматической

(гармонической) волны в комплексной форме:  $\hat{E}(t, \mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ , где  $A(\mathbf{r})$  – комплексная амплитуда. В результате получаем **уравнение Гельмгольца** для не зависящей от времени комплексной амплитуды:

$$-\omega^2 A(\mathbf{r}) \cdot e^{i\omega t} = v^2 \Delta A(\mathbf{r}) \cdot e^{i\omega t}, \quad (v^2 \Delta + \omega^2) A(\mathbf{r}) = 0,$$

$$(\Delta + k^2) A(\mathbf{r}) = 0, \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Пусть задана произвольная замкнутая поверхность  $\Sigma$ , и произвольная точка  $P$  внутри нее. На рисунке  $\rho$  – расстояние от точки наблюдения до физически бесконечно малого элемента  $d\sigma$  поверхности  $\Sigma$ ,  $\mathbf{n}$  – внутренняя по отношению к замкнутой поверхности  $\Sigma$  нормаль к элементу  $d\sigma$ .



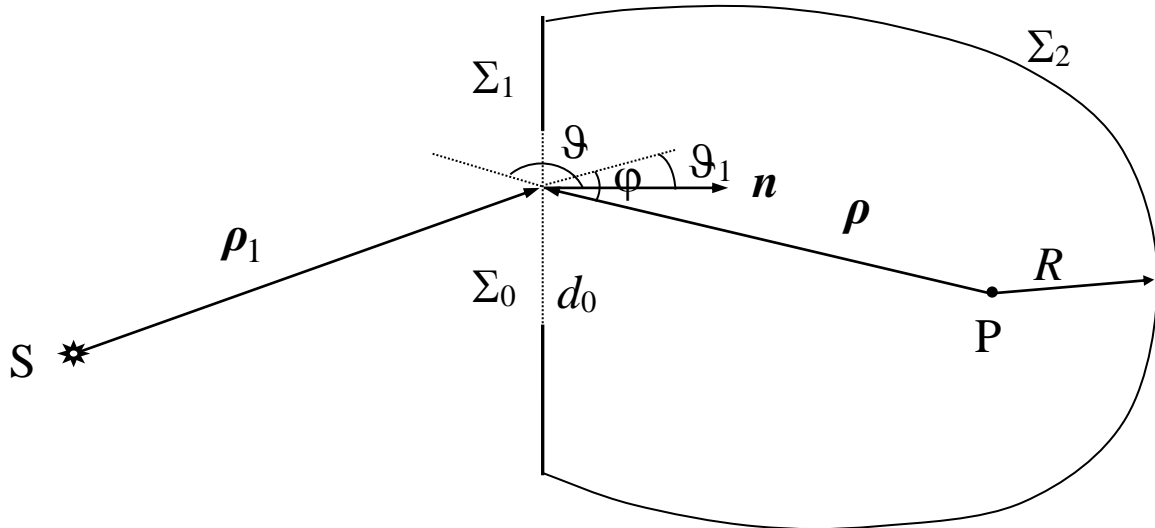
Если решение уравнения Гельмгольца (комплексная амплитуда  $A(\mathbf{r})$  гармонической волны) имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков на заданной поверхности  $\Sigma$  и внутри объема  $V$ , ограниченного этой поверхностью, то имеет место **интегральная теорема Гельмгольца-Кирхгофа**:

$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left( A_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) \Big|_{\Sigma} - \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma} \right) d\sigma.$$

В этой теореме решение уравнения Гельмгольца (комплексная амплитуда волнового поля) в произвольной точке поля  $P$  выражается через значения комплексной амплитуды поля и ее первых производных во всех точках произвольной замкнутой поверхности  $\Sigma$ , окружающей точку  $P$ .

## Дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа

Пусть монохроматическая волна, идущая от точечного источника  $S$  сквозь отверстие  $\Sigma_0$  в непрозрачном экране  $\Sigma_1$  создает световое возмущение в точке наблюдения  $P$ . Проведем вокруг этой точки  $P$  замкнутую поверхность  $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2$  (см. рисунок).



Допустим, что линейные размеры  $d_0$  отверстия  $\Sigma_0$  велики по сравнению с длиной волны света ( $d_0 \gg \lambda$ ). Тогда разумно принять **граничные условия Кирхгофа** (приближение Кирхгофа):

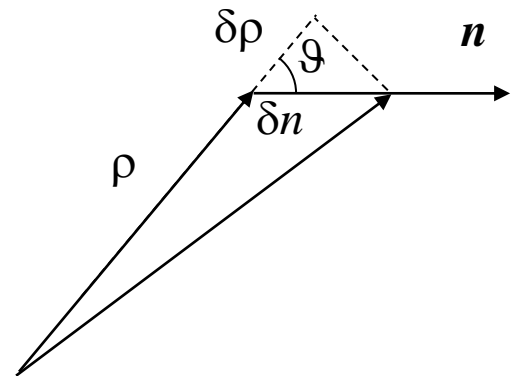
$$1) \text{ на } \Sigma_0 \text{ как в отсутствие экрана — } A_{\Sigma_0} = \frac{A_0}{\rho_1} e^{-ik\rho_1}, \quad \left. \frac{\partial A}{\partial n} \right|_{\Sigma_0} = \left. \frac{\partial A_{\Sigma_0}}{\partial n} \right|_{\Sigma_0};$$

$$2) \text{ в области расположения экрана } \Sigma_1 \text{ — } A_{\Sigma_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial A}{\partial n} \right|_{\Sigma_1} = 0;$$

$$3) \text{ на поверхности } \Sigma_2 \text{ — } A_{\Sigma_2} \rightarrow 0, \quad \left. \frac{\partial A}{\partial n} \right|_{\Sigma_2} \rightarrow 0 \text{ при бесконечном}$$

удалении точек поверхности  $\Sigma_2$  от точки наблюдения  $P$ ; их вклад убывает в силу того, что световое поле существовало в этой области пространства не всегда и имеет конечную скорость распространения.

Пусть справедливо **оптическое приближение** — расстояния  $\rho$  и  $\rho_1$  гораздо больше длины волны —  $\rho, \rho_1 \gg \lambda > \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k}$ .



Тогда, вычисляя производные по нормалям  $\frac{\partial \rho}{\partial n} = \cos(\hat{n\rho})$  (см. рис.),

получим:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) = \frac{-ike^{-ik\rho}\rho - e^{-ik\rho}}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial n} \cong -ik \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \cos \vartheta,$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial n} \right|_{\Sigma_0} = \frac{\partial A_{\Sigma}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left( A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \right) \cong -A_0 ik \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \cos \vartheta_1,$$

$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_0} \left( A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \left( -ik \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \cos \vartheta \right) + \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} A_0 ik \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \cos \vartheta_1 \right) d\sigma = \\ &= \iint_{\Sigma_0} A_0 \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \cdot \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \cdot \frac{i}{2\lambda} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta) d\sigma; \end{aligned}$$

$$A(P) = \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \cdot \frac{i}{2\lambda} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta) d\sigma,$$

где  $A_{\Sigma_0}$  – комплексная амплитуда поля реального точечного источника  $S$  (если учесть принцип суперпозиции, то и совокупности реальных точечных источников, для которых  $\cos \vartheta_1 \sim \text{const}$ ) на поверхности  $\Sigma_0$  вторичных источников. Эта формула называется **дифракционным интегралом (формулой) Френеля-Кирхгофа**. Если сравнить его с дифракционным интегралом Френеля, то коэффициент наклона равен:

$$K(\vartheta_1, \vartheta) = \frac{i}{2\lambda} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta).$$

В частном случае волнового фронта, выбранного в качестве светящейся поверхности  $\Sigma_0$ :  $\vartheta_1 = 0$ ,  $\vartheta = \pi - \varphi$ ,  $\cos \vartheta_1 = 1$ ,  $\cos \vartheta = -\cos \varphi$  и

$$K(\varphi) = \frac{i}{2\lambda} (1 + \cos \varphi).$$

В подынтегральном выражении дифракционного интеграла Френеля-Кирхгофа коэффициент наклона  $K(\vartheta_1, \vartheta)$  является медленно меняющейся функцией от положения точки на светящейся поверхности  $\Sigma_0$  по сравнению с быстро осциллирующим экспоненциальным множителем. Медленно меняющийся множитель не оказывает прак-

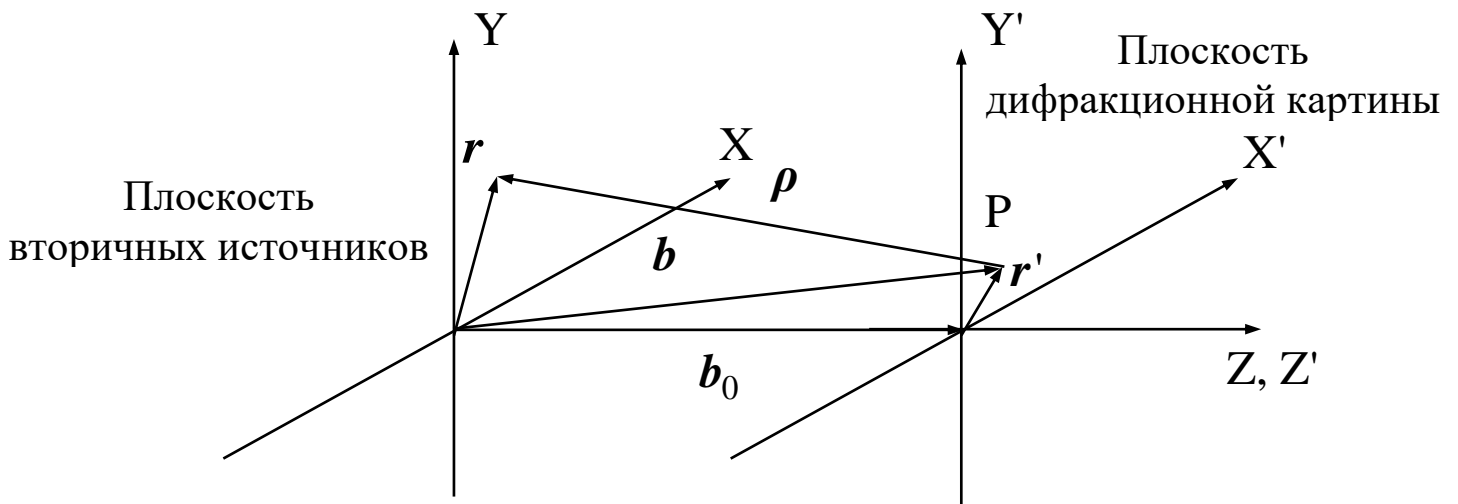
тического влияния на картину интерференции, не меняет ее видимость, а лишь слабо влияет на среднюю освещенность. В этом приближении можно записать:

$$A(P) = \overline{K(\vartheta_1, \vartheta)} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma.$$

В большинстве практически важных случаях углы  $\vartheta_1$  и  $\vartheta$  меняются в небольших пределах вблизи своих средних значений  $\overline{\vartheta_1} = 0$  и  $\overline{\vartheta} = \pi$  (**параксиальные пучки**). В этом приближении

$$\overline{K(\vartheta_1, \vartheta)} \cong \frac{i}{\lambda} \text{ и } A(P) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma.$$

**Замечание.** Для дифракционного интеграла Френеля-Кирхгофа справедливы те же, что и для дифракционного интеграла Френеля, теорема обратимости (взаимности) Гельмгольца и принцип дополненности Бабинне.



**Приближение Френеля** —  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll b_0, b \geq b_0 \sim b_D = \frac{r_0^2}{\lambda}$ :

$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb_0}}{b_0} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{ik \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{2b_0}} d\sigma.$$

**Приближение Фраунгофера** —  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll b_0, b > b_0 \gg b_D = \frac{r_0^2}{\lambda} > \frac{r^2}{\lambda} \gg r$ :

$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{ik \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{b}} d\sigma = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{ik \cdot \mathbf{r}} d\sigma.$$



## Пространственное преобразование Фурье

Комплексная амплитуда и интенсивность дифракционной картины в приближении Фраунгофера:

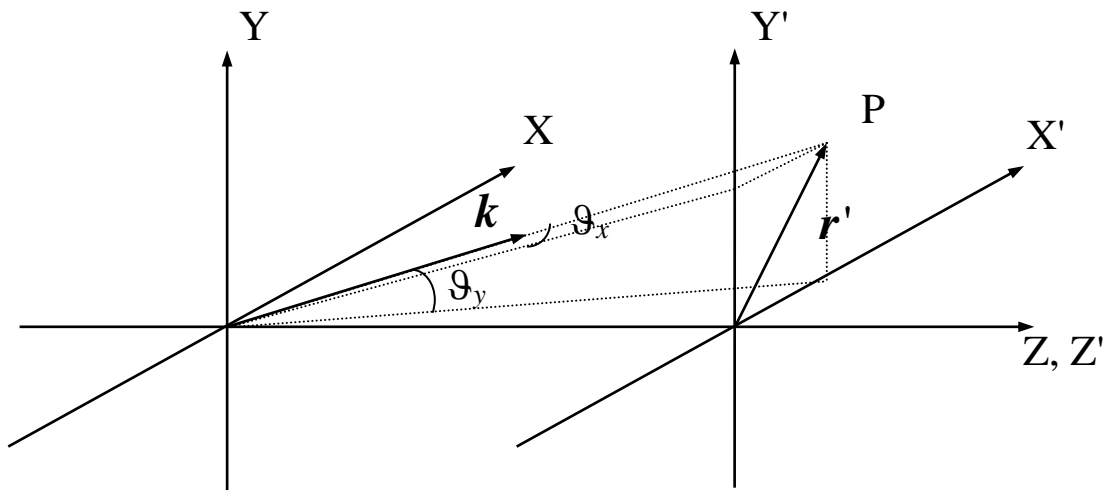
$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_{\Sigma}(ik_x, ik_y),$$

$$I(P) = \frac{1}{2} |A(P)|^2 = \frac{1}{2\lambda^2 b^2} |A_{\Sigma}(ik_x, ik_y)|^2.$$

**Пространственные частоты –**

$$k_x = k \sin \vartheta_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{x'}{b}, k_y = k \sin \vartheta_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{y'}{b};$$

**Угловые координаты точки наблюдения P –  $\vartheta_x$  и  $\vartheta_y$ .**



**Комплексная пространственная спектральная амплитуда –** прямое пространственное (пространственно-частотное или угловое) преобразование Фурье комплексной амплитуды  $A_{\Sigma}(x, y)$  светового поля:

$$A_{\Sigma}(ik_x, ik_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy.$$

**Комплексная амплитуда светового поля на поверхности  $\Sigma$  –** обратное пространственное преобразование Фурье комплексной пространственной спектральной амплитуды  $A_{\Sigma}(ik_x, ik_y)$ :

$$A_{\Sigma}(x, y) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(ik_x, ik_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y.$$

## Разложение пучка по плоским волнам

Комплексную амплитуду светового поля  $A(x, y, z)$  в произвольной точке пространства за плоскостью вторичных источников ищем в виде, аналогичном для поля на светящейся поверхности  $A_\Sigma(x, y)$ :

$$A(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(ik_x, ik_y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y.$$

Воспользуемся уравнением Гельмгольца  $(\Delta + k^2)A(x, y, z) = 0$ :

$$(\Delta + k^2) \left( A(ik_x, ik_y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A(ik_x, ik_y, z)}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) A(ik_x, ik_y, z) = 0;$$

$$A(ik_x, ik_y, z) = A_\Sigma(ik_x, ik_y) e^{-i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z} = A_\Sigma(ik_x, ik_y) e^{-ik_z z},$$

где  $k_z \equiv \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ .

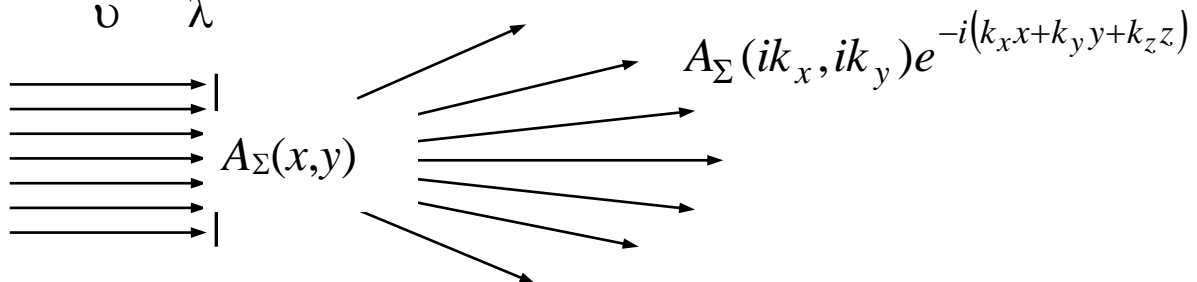
В результате: 
$$A(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(ik_x, ik_y) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_\Sigma(ik_x, ik_y) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} dk_x dk_y,$$

где  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор произвольной точки пространства относительно точки  $O$  – центра светящейся поверхности.

Как видим, ограниченный в пространстве пучок можно представить в виде суперпозиции (совокупности) плоских волн, распространяющихся в разных направлениях, задаваемых волновым вектором  $\mathbf{k}$  (с независимыми поперечными компонентами  $k_x$  и  $k_y$  волнового

вектора  $\mathbf{k}$  или угловыми координатами  $\vartheta_x$  и  $\vartheta_y$ , а также волновым числом  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} - const$ ).



## Угловой спектр и его ширина

Интенсивность дифракционной картины  $I(P)$  равна:

$$I(P) = \frac{1}{2} |A(P)|^2 = \frac{1}{2\lambda^2 b^2} |A_\Sigma(ik_x, ik_y)|^2.$$

Здесь  $|A_\Sigma(ik_x, ik_y)|^2$  – **пространственная спектральная плотность** или **угловой спектр излучения (пучка)**, заданного комплексной амплитудой  $A_\Sigma(x, y)$  светового возмущения на поверхности  $\Sigma$ .

В дальней зоне дифракции комплексная амплитуда дифракционной картины  $A(P)$  пропорциональна комплексной пространственной спектральной амплитуде  $A_\Sigma(ik_x, ik_y)$ , а интенсивность дифракционной картины  $I(P)$  – угловому спектру  $|A_\Sigma(ik_x, ik_y)|^2$  излучения вторичных источников с комплексной амплитудой  $A_\Sigma(x, y)$  в сечении исходного пучка. Основная закономерность дифракции Фраунгофера – формирование в дальней зоне устойчивой угловой структуры поля, повторяющей форму углового спектра пучка.

Как и при частотно-временном Фурье-преобразовании, когда ширина частотного спектра  $\Delta\omega$  связана с длительностью импульса  $\Delta t$  –  $\Delta\omega \cdot \Delta t \cong 2\pi$ , при пространственно-частотном Фурье-преобразовании ширины углового спектра  $\Delta k_x$  и  $\Delta k_y$  связаны с поперечными линейными размерами пучка  $l_x$  и  $l_y$ :

$$\Delta k_{x,y} \cdot l_{x,y} \cong 2\pi \text{ и } \Delta k_{x,y} = \frac{2\pi}{l_{x,y}}.$$

Для угловых координат  $\vartheta_{x,y}$  точки наблюдения  $P$  дифракционной картины, получим:

$$\Delta k_{x,y} = \Delta(k \sin \vartheta_{x,y}) = k \cos \vartheta_{x,y} \Delta \vartheta_{x,y} \cong \frac{2\pi}{l_{x,y}},$$

$$\Delta \vartheta_{x,y} \cong \frac{2\pi}{l_{x,y} k \cos \vartheta_{x,y}} = \frac{\lambda}{l_{x,y} \cos \vartheta_{x,y}}.$$

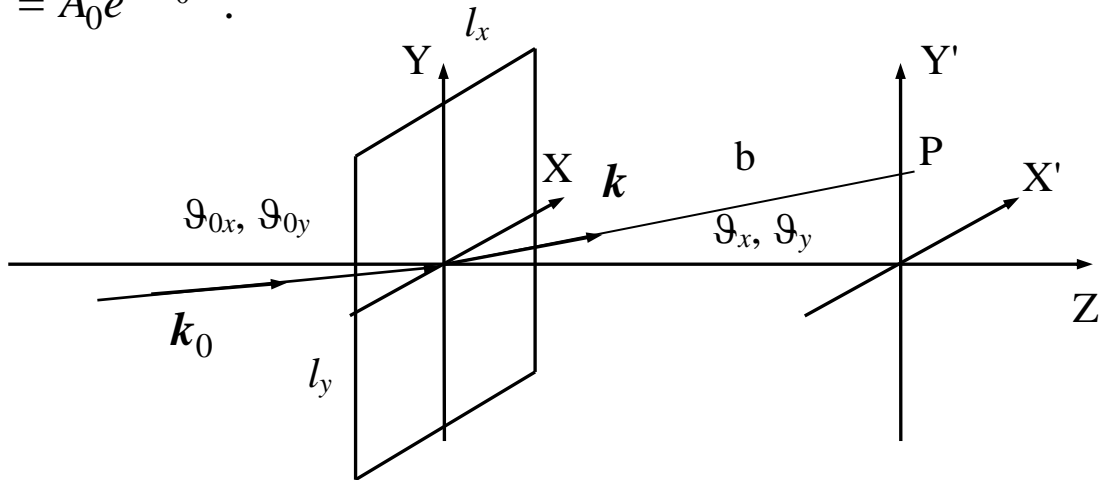
В случае параксиальных пучков –  $\Delta \vartheta_{x,y} \cong \frac{\lambda}{l_{x,y}}$ ,

что совпадает с оценкой **угла дифракционного расширения** пучка в дальней зоне.

## Дифракция на прямоугольном отверстии

Плоская монохроматическая световая волна на поверхности  $\Sigma_0$ :

$$A_{\Sigma_0} = A_0 e^{-ik_0 \cdot r}.$$



$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_0 e^{-ik_0 \cdot r} e^{ik \cdot r} d\sigma = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \iint_{\Sigma_0} e^{i(k-k_0) \cdot r} d\sigma =$$

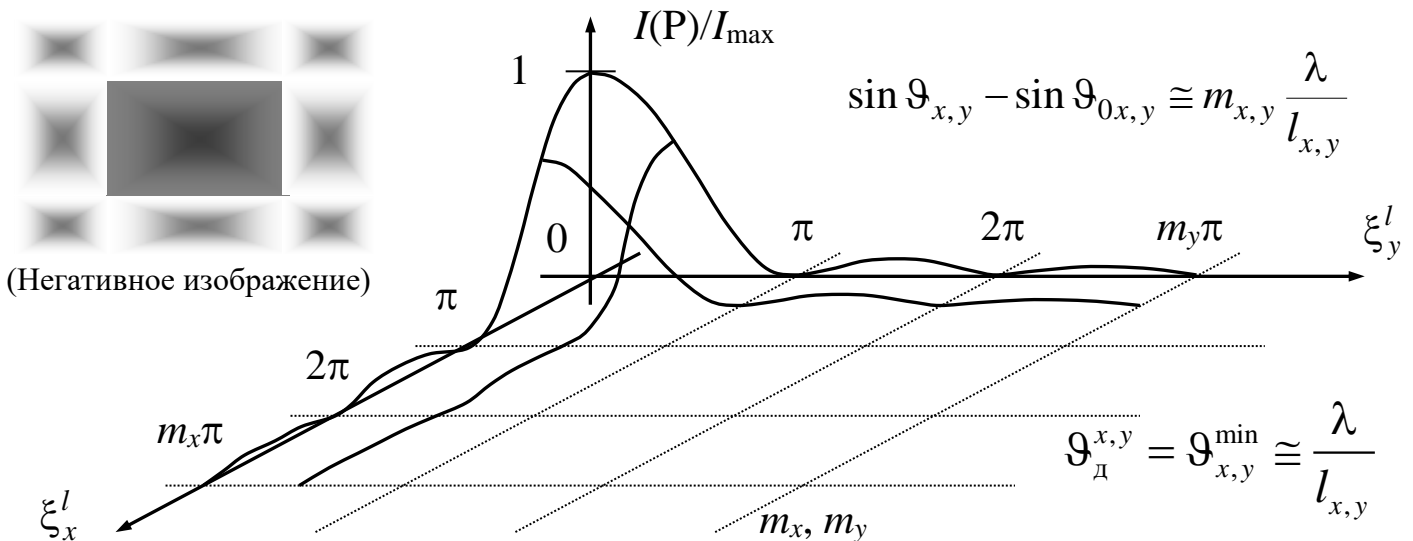
$$= \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \int_{-l_x/2}^{l_x/2} e^{i(k_x - k_{0x})x} dx \int_{-l_y/2}^{l_y/2} e^{i(k_y - k_{0y})y} dy;$$

$$A(P) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 l_x l_y \operatorname{sinc}\left(\frac{k_x - k_{0x}}{2} l_x\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k_y - k_{0y}}{2} l_y\right),$$

$$I(P) = \frac{1}{2} |A(P)|^2 = I_0 \left(\frac{l_x l_y}{\lambda b}\right)^2 \operatorname{sinc}^2 \xi_x^l \operatorname{sinc}^2 \xi_y^l, \quad \xi_{x,y}^l \equiv \frac{k_{x,y} - k_{0x,y}}{2} l_{x,y}.$$

Минимумы интенсивности при  $\xi_{x,y}^l \equiv \frac{k_{x,y} - k_{0x,y}}{2} l_{x,y} = m_{x,y} \pi$ ,

$m_{x,y} = 1, 2, 3, \dots$  – **порядок дифракции** вдоль оси X (Y).



## Дифракция на круглом отверстии

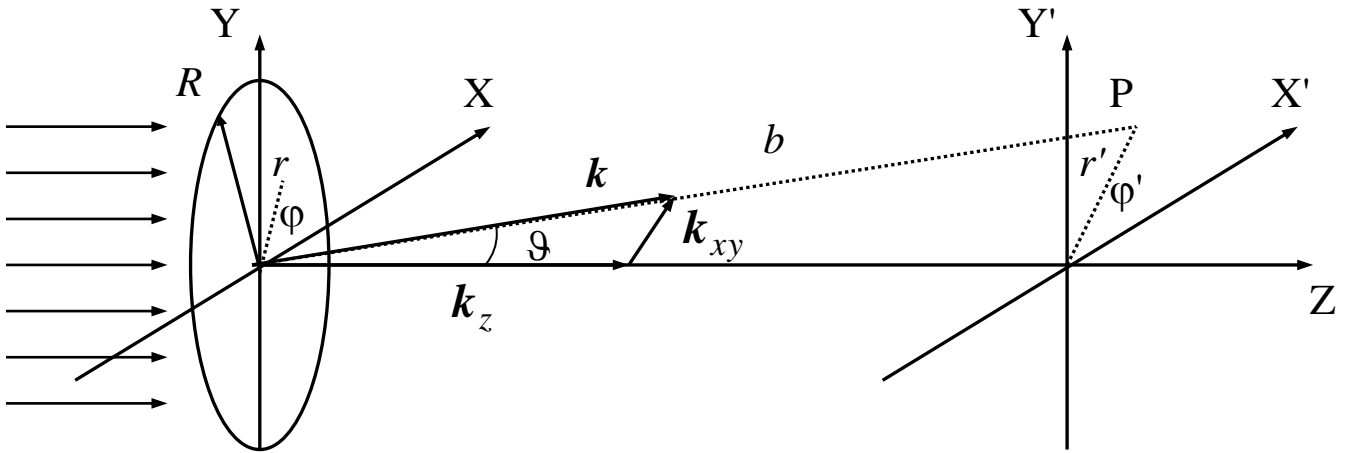
Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на поверхность  $\Sigma_0$ :

$$A_{\Sigma_0} = A_0 e^{-ik_0 \cdot r} = A_0.$$

В полярных координатах:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi; \quad x' = r' \cos \varphi', \quad y' = r' \sin \varphi';$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{k}_z + \mathbf{k}_{xy}) \cdot \mathbf{r} = k_{xy} r \cdot \cos(\varphi - \varphi').$$



$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma_0} A_{\Sigma_0} e^{ik \cdot r} d\sigma = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{ik_{xy} r \cos(\varphi - \varphi')} r dr d\varphi = \\ &= \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \frac{2\pi R}{k_{xy}} J_1(k_{xy} R) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_0 \pi R^2 \frac{2J_1(\xi)}{\xi} = A(\xi), \end{aligned}$$

где:  $J_1(\xi)$  – функция Бесселя первого порядка,

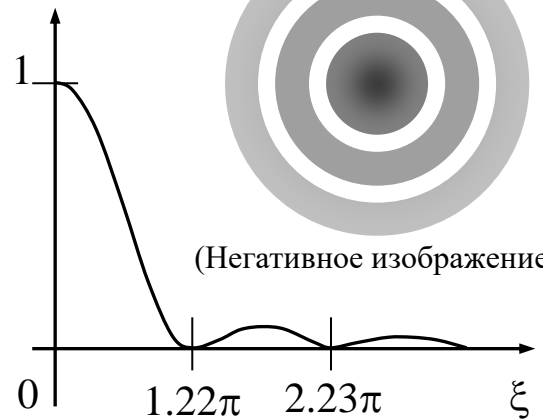
$$\xi \equiv k_{xy} R = kR \sin \vartheta = \frac{2\pi R}{\lambda} \sin \vartheta.$$

$$I(\xi) = \frac{1}{2} |A(\xi)|^2 = I_0 \left( \frac{\pi R^2}{\lambda b} \right)^2 \left( \frac{2J_1(\xi)}{\xi} \right)^2,$$

$$\xi_{\min} = kR \sin \vartheta_{\min} \cong 1.22\pi,$$

$$\vartheta_D = \vartheta_{\min} \cong 0.61 \frac{\lambda}{R} = 1.22 \frac{\lambda}{D}.$$

$I(P)/I_{\max}$



## Дифракционный интеграл для одномерной структуры

В этом случае  $A_{\Sigma}(x, y) = A_{\Sigma}(x)$ . Поскольку  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$  и  $b \gg r$ , то

$$\rho = \sqrt{b^2 + r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt{b^2 + r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \cong b + \frac{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{2b}$$
 и дифракцион-

ный интеграл Френеля-Кирхгофа можно записать в виде:

$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} A_{\Sigma} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma \cong \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma} A_{\Sigma} e^{-ik \frac{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{2b}} dx dy = \\ &= \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(x) e^{-ik \frac{x^2 - 2xx'}{2b}} e^{-ik \frac{y^2 - 2yy'}{2b}} dx dy; \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{k}{2b} (y^2 - 2yy')} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{k}{2b} (y-y')^2} e^{i \frac{k}{2b} y'^2} dy = e^{i \frac{k}{2b} y'^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{k}{2b} (y-y')^2} dy = \\ &= e^{i \frac{k}{2b} y'^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i \frac{k}{2b}}} = e^{i \frac{k}{2b} y'^2} \sqrt{\frac{2b\pi}{ik}} \cong \sqrt{\frac{2b\pi}{ik}}. \end{aligned}$$

Здесь  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ , при точке наблюдения P с  $b \gg \frac{y'^2}{\lambda}$  ( $L_y \gg \sqrt{b\lambda}$ ).

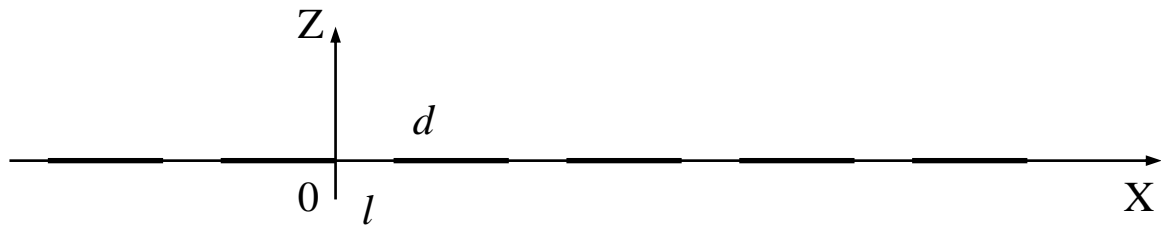
$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \sqrt{\frac{2b\pi}{ik}} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(x) e^{-ik \frac{x^2 - 2xx'}{2b}} dx = \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2b\lambda}} \cdot e^{-ikb} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(x) e^{-ik \frac{x^2 - 2xx'}{2b}} dx. \end{aligned}$$

При рассмотрении дифракции в дальней зоне дифракции по координате  $x$  ( $b \gg \frac{x^2}{\lambda}$ ) окончательно получим:

$$A(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(x) e^{ik_x x} dx.$$

## Амплитудная прямоугольная решетка

Пространственно-периодическая система прозрачных щелей, перпендикулярных направлению периодичности, в непрозрачном экране



Функция пропускания –  $t(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq l, \\ 0 & \text{при } l < x < d. \end{cases}$

Результат дифракции на одной щели:

$$A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 \int_0^d t(x) e^{i(k_x - k_{0x})x} dx =$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 e^{i \frac{k_x - k_{0x} l}{2}} l \cdot \text{sinc} \left( \frac{k_x - k_{0x} l}{2} \right);$$

$$I_1(k_x) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \text{sinc}^2 \left( \frac{k_x - k_{0x} l}{2} \right) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \text{sinc}^2 \xi_x^l, \quad \xi_x^l \equiv \frac{k_x - k_{0x} l}{2}.$$

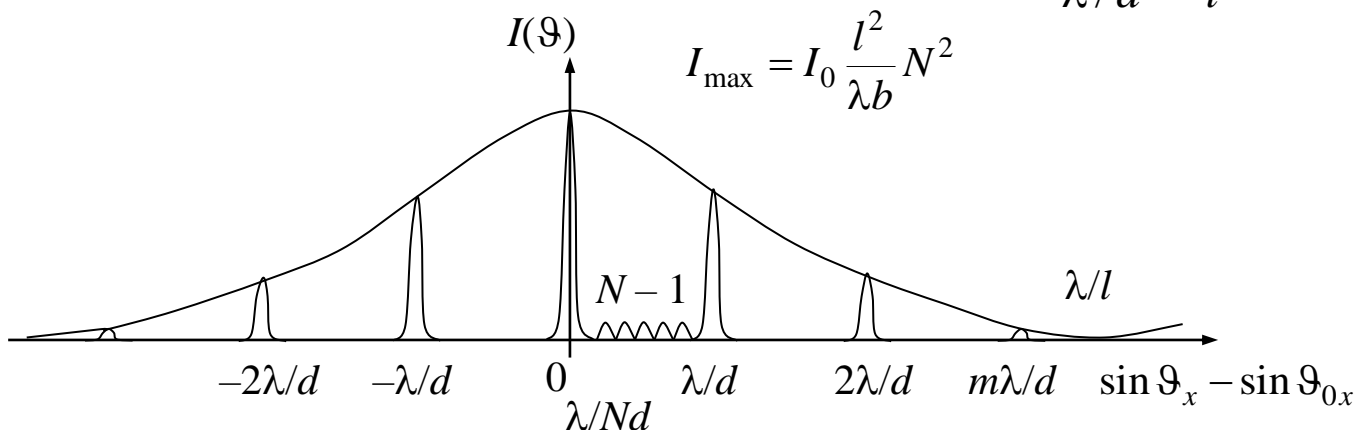
Результат дифракции на всей решетке:

$$I(k_x) = I_1(k_x) H(N, \xi_x^d) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \text{sinc}^2 \xi_x^l \frac{\sin^2(N \xi_x^d)}{\sin^2 \xi_x^d}.$$

Условие наличия **главных минимумов**:

$$\xi_x^l \equiv \frac{k_x - k_{0x} l}{2} = \frac{\pi l (\sin \vartheta_x - \sin \vartheta_{0x})}{\lambda} = k\pi, \quad \sin \vartheta_x - \sin \vartheta_{0x} = k \frac{\lambda}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

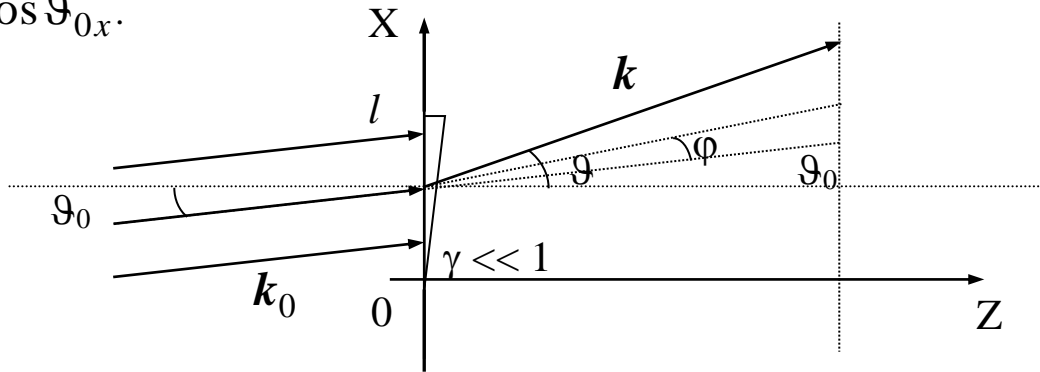
Максимальное значение порядка дифракции:  $m_{\max} = \frac{\lambda/l}{\lambda/d} = \frac{d}{l}$ .



## Фазовая призматическая решетка

Дифракция на щели с непрерывным изменением фазы (тонкой призме):  $t(x) = e^{-i\Phi(x)}$ ,  $\Phi(x) \cong k(n-1)\gamma x / \cos \vartheta_{0x} = k\varphi x$ ;

$$\varphi = (n-1)\gamma / \cos \vartheta_{0x}.$$



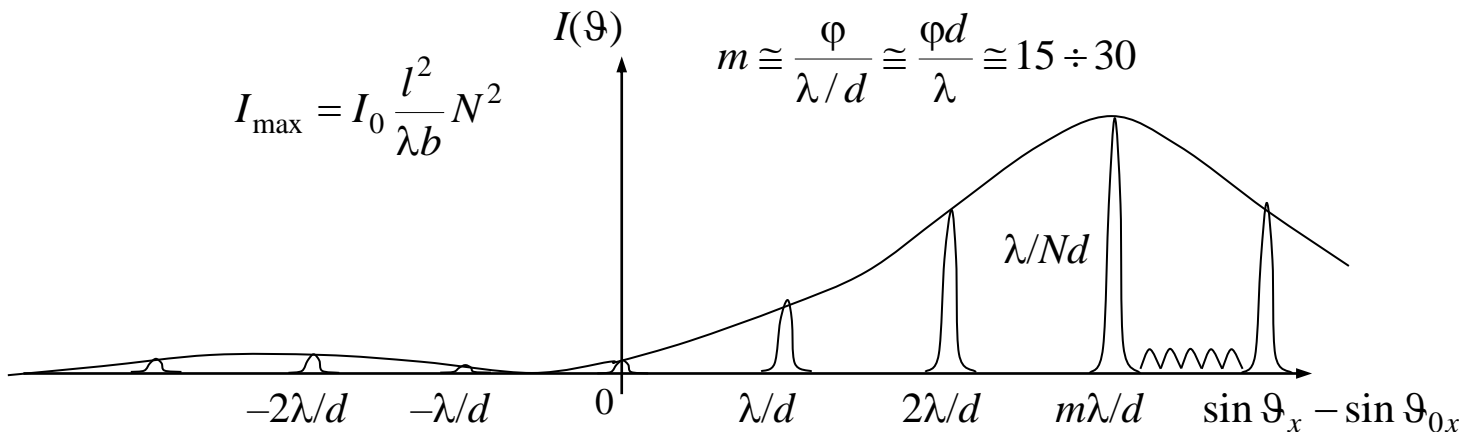
Результат дифракции на одной щели:

$$A_1(k_x) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 \int_0^l e^{-ik\varphi x} e^{i(k_x - k_{0x})x} dx =$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} A_0 e^{i \frac{k_x - k_{0x} - k\varphi l}{2} l} l \cdot \text{sinc} \left( \frac{k_x - k_{0x} - k\varphi l}{2} l \right),$$

$$I_1(\vartheta) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \text{sinc}^2 \left( \frac{k_x - k_{0x} - k\varphi l}{2} l \right) = I_0 \frac{l^2}{\lambda b} \text{sinc}^2 \left( k \frac{\sin \vartheta_x - \sin \vartheta_{0x} - \varphi l}{2} l \right).$$

Распределение интенсивности  $I_1(\vartheta)$  в дифракционной картине точно такое же, как и в случае щели, только повернуто на угол  $\varphi$ .

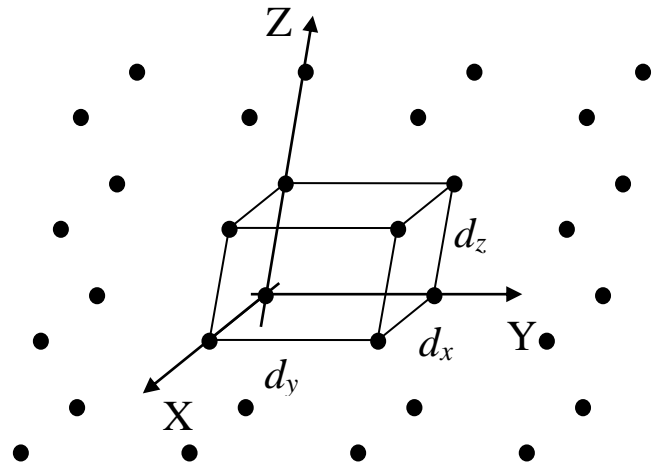


Если в дифракционной решетке использовать вместо щелей призмы, то направления на главные максимумы не изменятся, а огибающая  $I_1(\vartheta)$  сдвинется на угол  $\varphi$ , увеличивая интенсивность главных максимумов при более высоких порядках дифракции. Это позволяет работать с более высокими порядками дифракции –  $m$ .



# Дифракция на трехмерной периодической структуре

Кристаллическую решетку (трехмерную периодическую пространственную атомную структуру) можно рассматривать как трехмерный оптический элемент с периодической структурой оптических свойств вдоль трех некомпланарных направлений  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  с периодами  $d_x$ ,  $d_y$  и  $d_z$  ( $\sim 2 \text{ \AA} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ ). При размере монокристаллических зерен  $\sim 0.1 \text{ мкм}$  число периодов  $N_{x,y,z} \sim 5 \cdot 10^2$  и интенсивность рефлексов  $I \sim N_x N_y N_z I_0 \sim 10^8 I_0$ .



Направления на главные максимумы дифракционной картины (так называемые дифракционные направления), возникающей при дифракции рентгеновского излучения ( $\lambda_{X\text{-ray}} \sim 1.5 \text{ \AA}$ ) на кристаллической решетке определяются **уравнениями Лауэ**:

$$d_x (\cos \alpha_x - \cos \alpha_{0x}) = m_x \lambda,$$

$$d_y (\cos \alpha_y - \cos \alpha_{0y}) = m_y \lambda,$$

$$d_z (\cos \alpha_z - \cos \alpha_{0z}) = m_z \lambda,$$

где  $\alpha_{0x,y,z} = \pi/2 - \vartheta_{0x,y,z}$ ,  $\alpha_{x,y,z} = \pi/2 - \vartheta_{x,y,z}$  – углы между направлениями падающей и дифрагированной плоскими волнами и осями координат. При этом для прямоугольной системы координат:

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1,$$

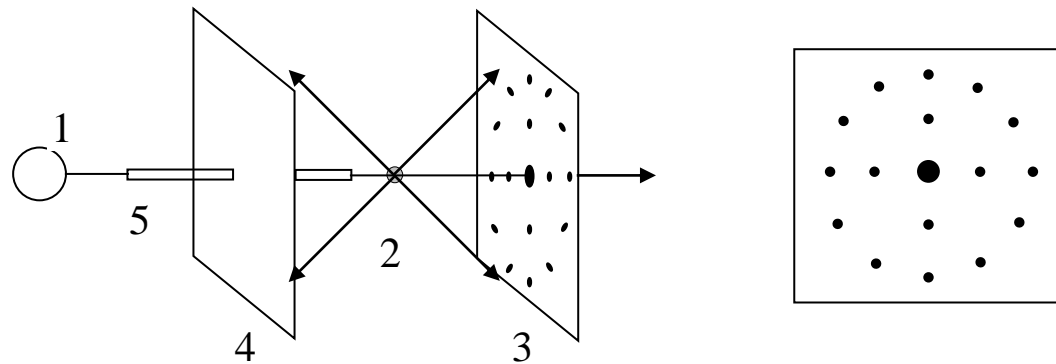
$$\cos^2 \alpha_{0x} + \cos^2 \alpha_{0y} + \cos^2 \alpha_{0z} = 1.$$

Система полученных уравнений **имеет решения** лишь для некоторых определенных значений длины волны излучения  $\lambda$  или определенных значений углов  $\alpha_{0x}$ ,  $\alpha_{0y}$  и  $\alpha_{0z}$ , определяющих ориентацию кристалла относительно падающей волны.

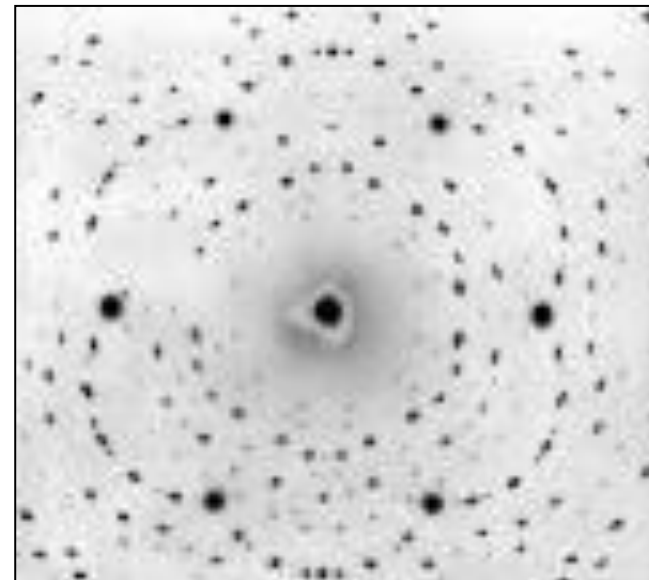
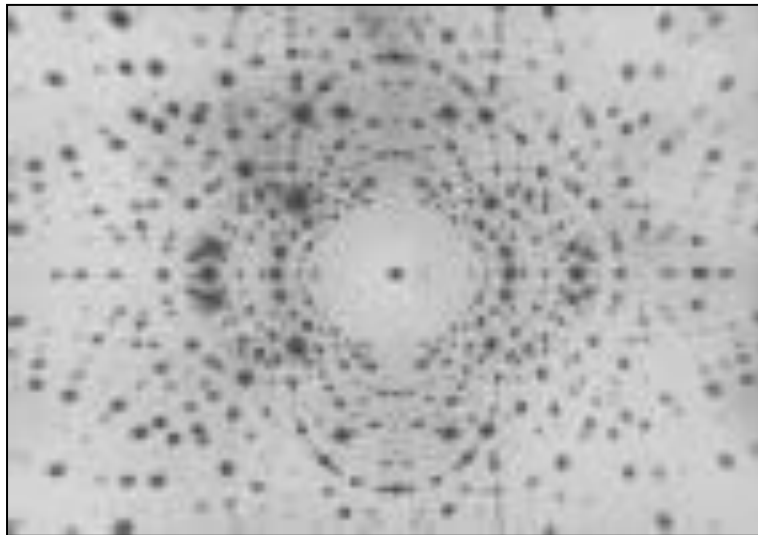
Для получения дифракционных картин используют либо рентгеновское излучение с широким частотным спектром ( $\Delta\lambda$ ), либо вращают кристалл относительно монохроматического пучка рентгеновского излучения с помощью специального гониометрического устройства, меняя углы  $\alpha_{0x}$ ,  $\alpha_{0y}$ ,  $\alpha_{0z}$ , либо используют поликристаллический образец с сильно разориентированными кристалликами.

## Схема установки

для получения картины дифракции рентгеновских лучей в кристалле – **Лауэграммы**  
(В общем случае каждому рефлексу (пятну) на Лауэграмме соответствует пучок света со своей длиной волны)

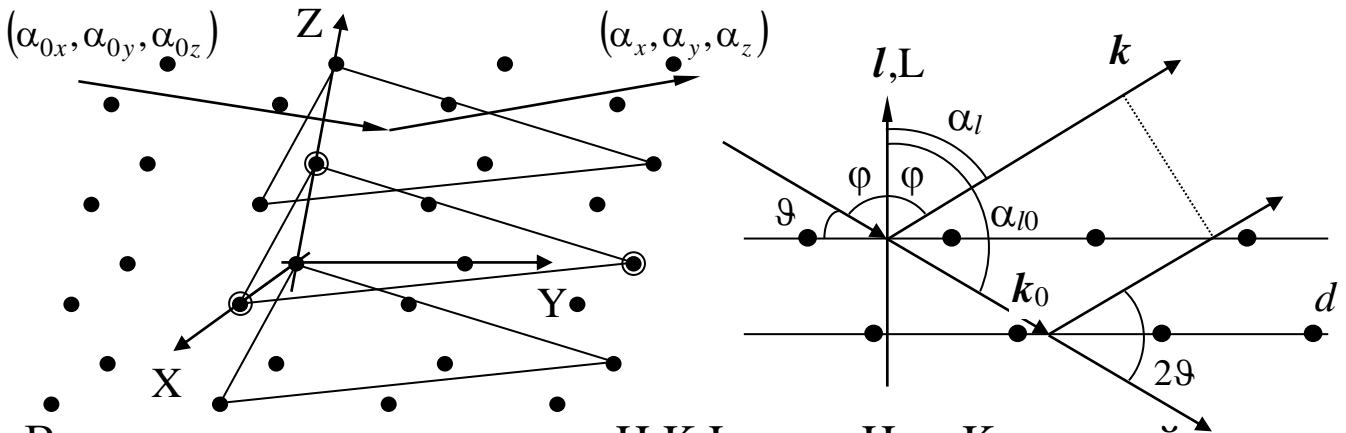


- 1 – источник рентгеновского излучения с широким спектром ( $\Delta\lambda$ ),
- 2 – исследуемый кристалл,
- 3 – положение фотопластинки при прямой фотосъемке,
- 4 – положение фотопластинки при обратной фотосъемке,
- 5 – коллиматор.



## Условие (уравнение) Брэгга-Вульфа

Дифракция на трехмерной системе атомов в кристалле может быть рассмотрена как отражение рентгеновских волн от атомных плоскостей кристалла.



Введем систему координат  $H, K, L$ , оси  $H$  и  $K$  которой лежат в атомной плоскости решетки, а ось  $L$  перпендикулярна этой плоскости. Поскольку угол падения  $\varphi$  равен углу отражения, а волновые векторы  $k_0$ ,  $k$  и нормаль  $l$  лежат в одной плоскости, перпендикулярной отражающим плоскостям, то  $\alpha_{h,k} = \alpha_{0h,k}$  и два условия Лауэ:

$$d_h (\cos \alpha_h - \cos \alpha_{0h}) = m_h \lambda,$$

$$d_k (\cos \alpha_k - \cos \alpha_{0k}) = m_k \lambda$$

для отраженного луча будут выполняться при  $m_h = m_k = 0$ .

Если учесть, что  $\alpha_l = \varphi$  и  $\alpha_{0l} = \pi - \varphi$  (см. рис.), то третье условие Лауэ преобразуется к виду:

$$d_l (\cos \alpha_l - \cos \alpha_{0l}) = 2d \cos \varphi = m \lambda,$$

$$2d \sin \vartheta = m \lambda,$$

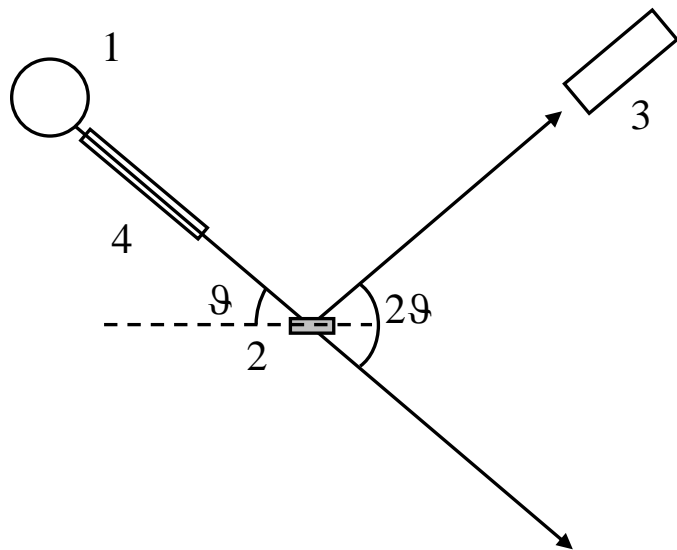
где  $d \equiv d_l$  – расстояние между плоскостями,  $\varphi$  – угол падения,  $\vartheta$  – угол скольжения,  $2\vartheta$  – угол дифракции,  $m$  – целое число.

Последнее уравнение называется **условием (уравнением) Брэгга-Вульфа** (1913 г.). Углы скольжения  $\vartheta$ , удовлетворяющие условию Брэгга-Вульфа, называются **углами Брэгга**. Если это условие выполнено, то волны, дифрагированные на семействе параллельных атомных плоскостей кристалла, будут складываться в фазе и усиливать друг друга. Для направлений, не удовлетворяющих записанному условию, произойдет взаимное погашение интерферирующих волн. Выполнение данного условия обеспечивается различной ориентацией кристалликов в поликристаллическом образце по отношению к направлению первичного рентгеновского монохроматического пучка – пучка характеристического излучения анода рентгеновской трубки.

## Схема регистрации по Брэггу-Брентано

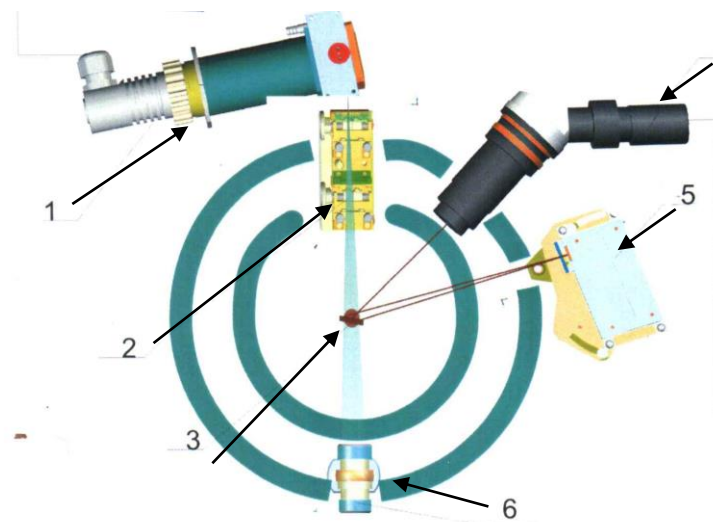
(для получения картины дифракции рентгеновских лучей в поликристаллическом образце – дифрактограммы)

Общая схема



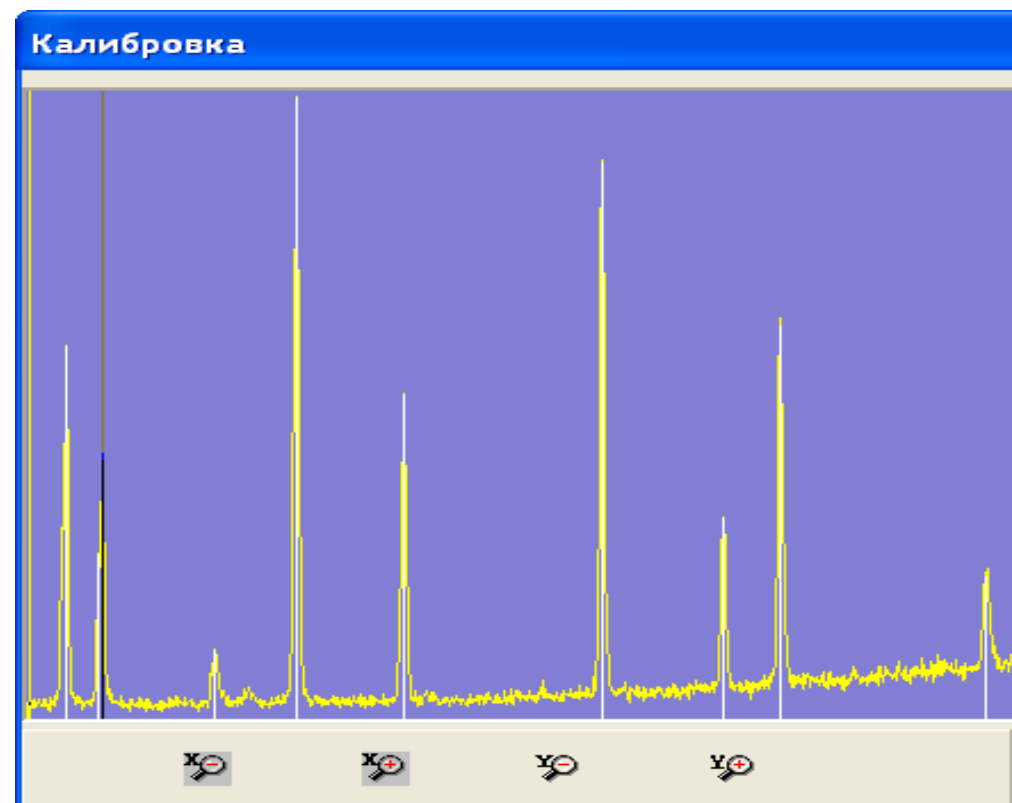
- 1 – источник рентгеновского излучения,
- 2 – исследуемый образец,
- 3 – детектор,
- 4 – коллиматор.

СУР-01 "Реном"



- 1 – рентгеновская трубка,
- 2 – блок коллимации,
- 3 – держатель с исследуемым веществом,
- 4 – оптическая система выбора микроучастков,
- 5 – детектор PCA CEP-06,
- 6 – ловушка рентгеновского пучка.

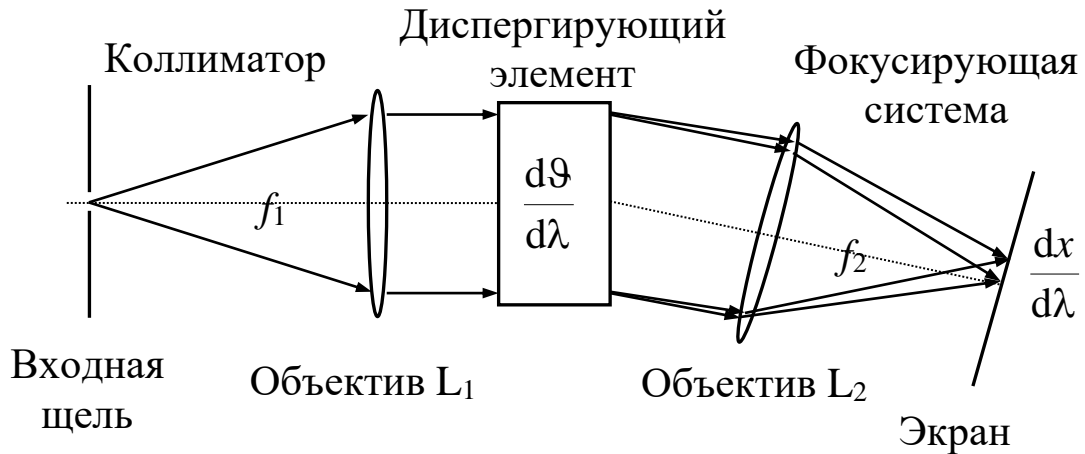
# Спектрометр универсальный рентгеновский СУР-01 "Реном"



Дифрактограмма – I(29)

## Основные характеристики спектральных приборов

**Спектральный прибор** – оптический прибор для пространственного разложения светового поля на монохроматические составляющие (в частотный спектр) с помощью угловой дисперсии.



**Аппаратная функция  $I(P)$**  – "отклик" прибора на монохроматическое излучение – регистрируемая интенсивность светового поля в зависимости от обобщенной координаты точки наблюдения  $P$ .

**Область свободной дисперсии, дисперсионная область  $\Delta\lambda$**  – максимальный интервал длин волн, при котором возможна работа прибора (получение разрешенной дифракционной или интерференционной картины). Максимальный интервал длин волн, исследуемый спектральным прибором.

**Предел разрешения  $\delta\lambda$**  – минимальная разность длин волн двух спектральных линий, которые разрешает спектральный прибор.

**Условие разрешения Рэля** (предложено английским физиком Джоном Уильямом Рэлеем в 1879 г.) – спектральные линии считаются разрешенными, если максимум регистрируемой интенсивности от одной линии попадает на минимум регистрируемой интенсивности от другой. Если линии не обладают минимумом регистрируемой интенсивности, то предел разрешения  $\delta\lambda$  соответствует сдвигу максимума интенсивности линии на ее ширину.

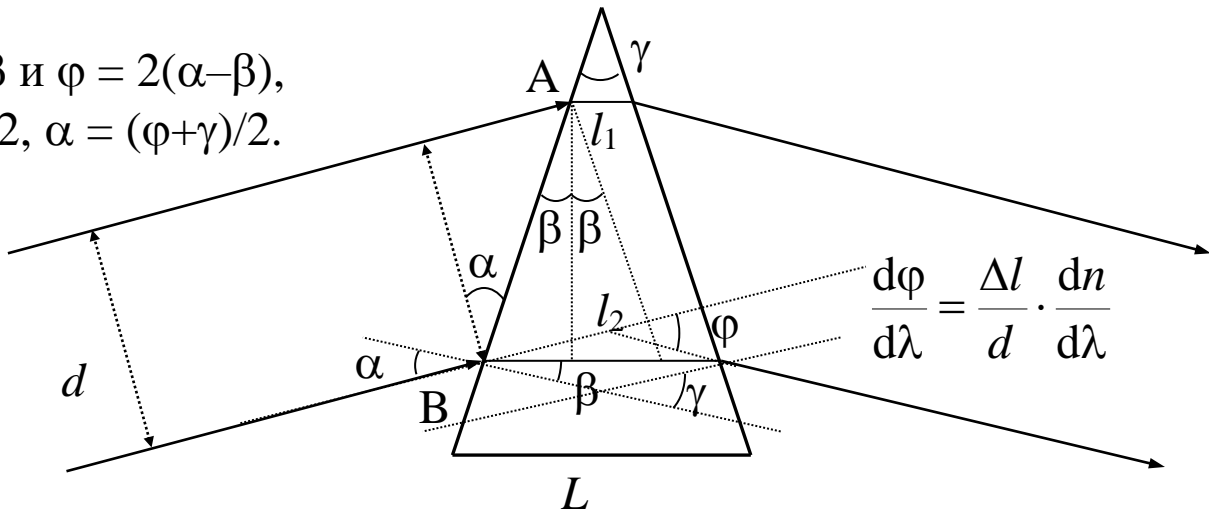
**Разрешающая способность (сила)  $R = \lambda/\delta\lambda$**  – отношение характерной длины волны  $\lambda$  исслед. излучения к пределу разрешения  $\delta\lambda$ .

**Угловая дисперсия  $D_\theta = d\theta/d\lambda$**  – скорость изменения угловой координаты  $\theta$  максимума регистрируемой интенсивности с изменением длины волны.

## Призма ( $\gamma, L, dn/d\lambda$ )

$$\gamma = 2\beta \text{ и } \varphi = 2(\alpha - \beta),$$

$$\beta = \gamma/2, \alpha = (\varphi + \gamma)/2.$$



$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\Delta l}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

**Закон Снеллиуса:**  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin((\varphi + \gamma)/2)}{\sin(\gamma/2)} = n.$

$$\frac{\cos((\varphi + \gamma)/2)}{2 \sin(\gamma/2)} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \beta} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda},$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{2 \sin \beta}{\cos \alpha} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{l_2 - l_1}{AB} \cdot \frac{AB}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\Delta l}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$$

**Аппаратная функция** – интенсивность дифракц. картины от щели:

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{d^2}{\lambda b} \text{sinc}^2 \left( \frac{k \sin(\vartheta - \varphi)}{2} d \right).$$

**Условие главного максимума:**  $\frac{k \sin(\vartheta - \varphi)}{2} d = 0 \Rightarrow \vartheta = \varphi, \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda}.$

**Условие ближайшего минимума:**  $\frac{k \sin(\vartheta - \varphi)}{2} d = \pi \Rightarrow \vartheta \cong \varphi + \frac{\lambda}{d},$

сдвиг минимума относительно максимума –  $\delta\vartheta = \frac{\lambda}{d}.$

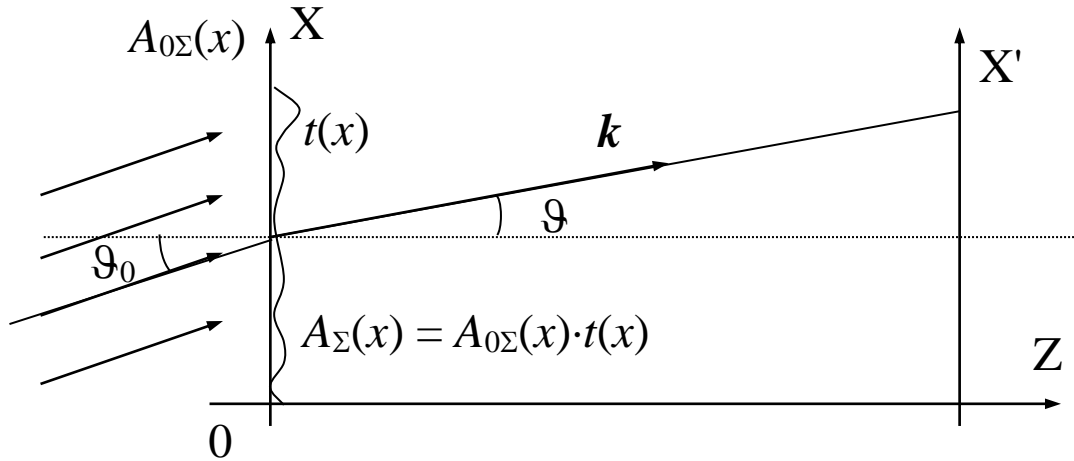
**Область свободной дисперсии:**  $\Delta\lambda \sim \infty.$

**Угловая дисперсия:**  $D_\vartheta \equiv \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\Delta l}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$

**Предел разрешения:**  $\delta\lambda = \frac{\delta\vartheta}{|D_\vartheta|} = \frac{\lambda/d}{\frac{\Delta l}{d} \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|} = \frac{\lambda}{\Delta l \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|}.$

**Разрешающая способность:**  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \Delta l \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|; R_{\max} = L \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|.$

## Дифракционная решетка ( $d, N, m$ )



**Аппаратная функция** – интенсивность дифракц. картины от дифр. р.:

$$I(\vartheta) = I_1(\vartheta) \cdot H(N, \xi(\vartheta)),$$

$$H(N, \xi(\vartheta)) = \frac{\sin^2(N\xi(\vartheta))}{\sin^2 \xi(\vartheta)}, \quad \xi(\vartheta) = k \frac{\sin \vartheta - \sin \vartheta_0}{2} d = k \frac{\Delta(\vartheta)}{2},$$

$\Delta(\vartheta)$  – разность хода крайних лучей для одного периода решетки.

**Условие главных максимумов:**

$$\xi(\vartheta) = k \frac{\Delta(\vartheta)}{2} = m\pi, \quad \Delta(\vartheta) = d(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) = m\lambda.$$

**Условие ближайших минимумов:**  $\Delta(\vartheta) = d(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda.$

**Порядок дифракции:**  $m = \frac{\Delta(\vartheta)}{\lambda} = \frac{d(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0)}{\lambda}.$

**Область свободной дисперсии:**  $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$

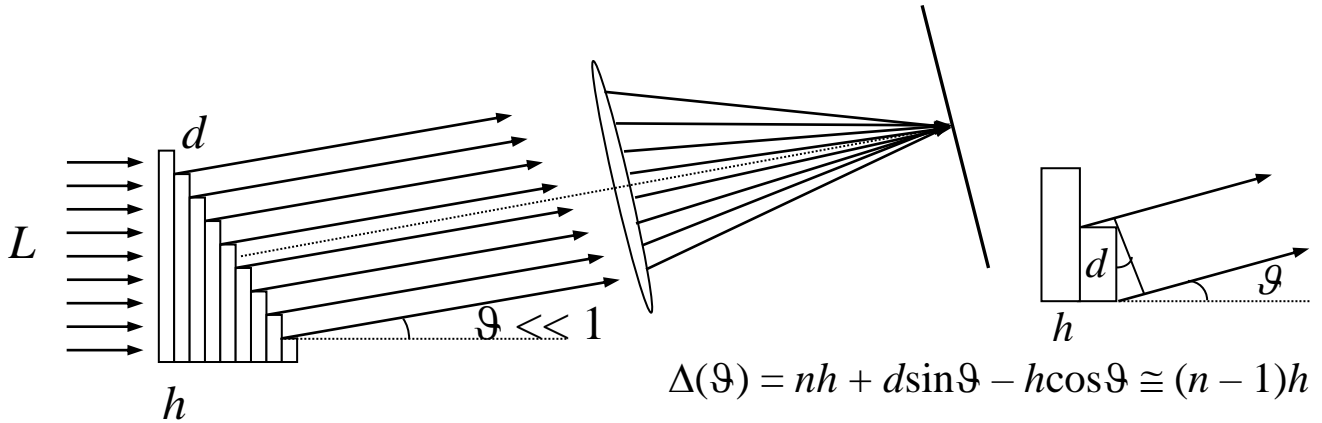
**Предел разрешения:**  $m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda \Rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm}.$

**Разрешающая способность:**  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm \text{ !}, \quad R_{\max} = Nm_{\max} = N \frac{d}{l} = \frac{L}{l}.$

**Угловая дисперсия:**  $D_{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \vartheta}.$



**Эшелон Майкельсона** ( $h, n, d, N, m$ )  
(разновидность дифракционной фазовой решетки)



**Как для дифракционной решетки:**

**Аппаратная функция:**

$$I(\vartheta) = I_1(\vartheta) \cdot H(N, \xi(\vartheta)),$$

$$H(N, \xi(\vartheta)) = \frac{\sin^2(N\xi(\vartheta))}{\sin^2 \xi(\vartheta)}, \quad \xi(\vartheta) = k \frac{\Delta(\vartheta)}{2}.$$

**Условие главных максимумов:**  $\Delta(\vartheta) = nh + d \sin \vartheta - h \cos \vartheta = m\lambda$ .

**Порядок дифракции:**  $m = \frac{\Delta}{\lambda} \cong \frac{(n-1)h}{\lambda}$ .

**Область свободной дисперсии:**  $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \cong \frac{\lambda^2}{(n-1)h}$ .

**Предел разрешения:**  $\delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm} \cong \frac{\lambda^2}{N(n-1)h}$ .

**Разрешающая способность:**  $R = Nm \cong \frac{N(n-1)h}{\lambda}$ .

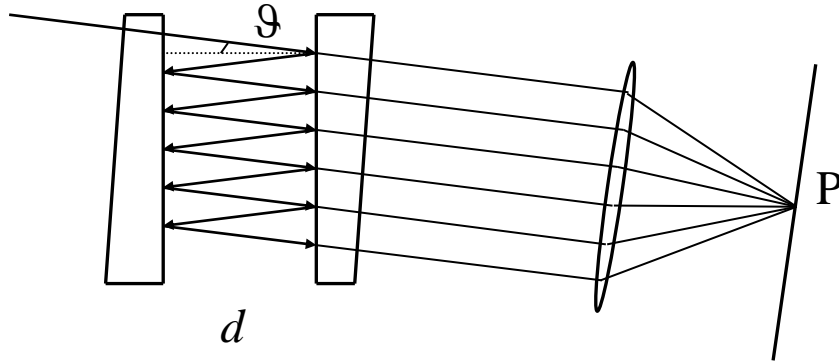
**Угловая дисперсия:**

$$\frac{d(\Delta(\vartheta))}{d\lambda} = (d \cos \vartheta + h \sin \vartheta) \frac{d\vartheta}{d\lambda} = m,$$

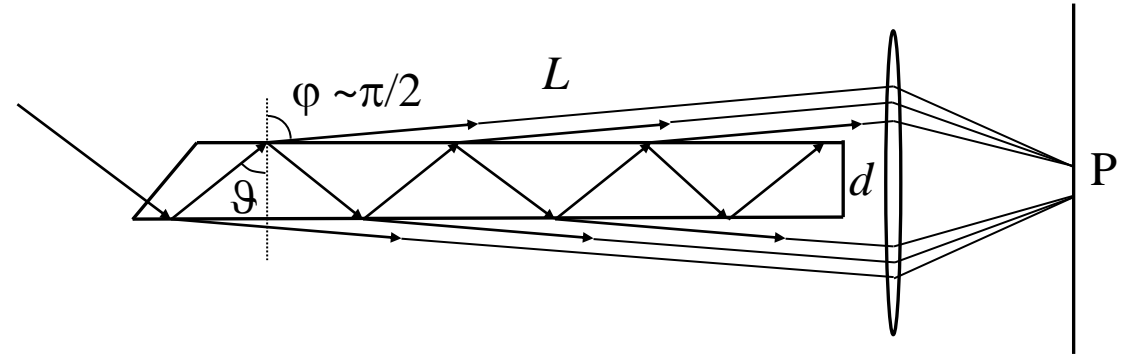
$$D_\vartheta = \frac{m}{d \cos \vartheta + h \sin \vartheta} \cong \frac{m}{d} = \frac{(n-1)h}{\lambda d}.$$

# Многоволновые интерферометры

Интерферометр Фабри-Перо ( $d, \vartheta, R$ )



Пластинка Льюммера-Герке ( $d, n, R$ )



Аппаратная функция – ф-ла Эйри:  $I_{\text{пр}}(\vartheta) = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\Phi(\vartheta)}{2}}$ ,  $\Phi(\vartheta) = \frac{4\pi d}{\lambda} \cos \vartheta$ ;  $\delta = 2 \frac{1-R}{\sqrt{R}}$ .

Условие максимумов:  $\Phi(\vartheta) = m2\pi \Rightarrow 2d \cos \vartheta = m\lambda$ . Порядок интерференции:  $m = \frac{2d \cos \vartheta}{\lambda}$ ;

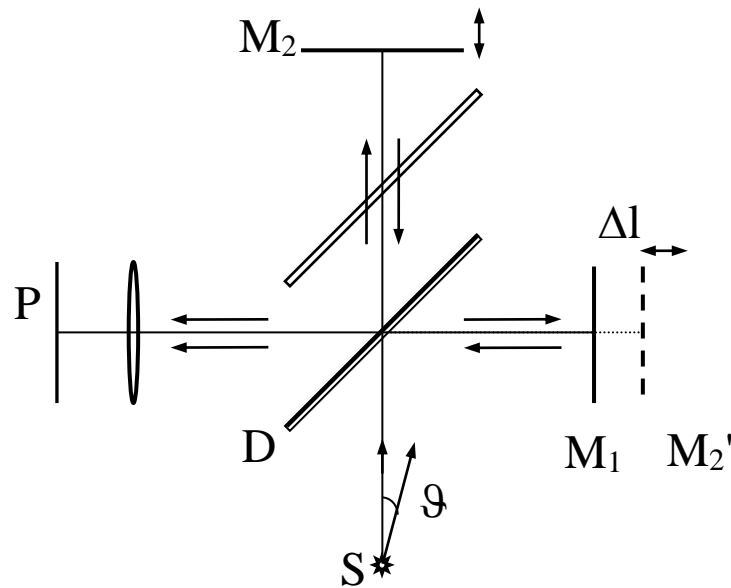
Дисперсионная область:  $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{2d \cos \vartheta}$ .

Предел разрешения: сдвиг интерф. полосы  $\delta\Phi = \frac{4\pi d \cos \vartheta}{\lambda^2} \delta\lambda = \frac{2\pi m}{\lambda} \delta\lambda = \delta = 2 \frac{1-R}{\sqrt{R}} \Rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \cdot \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}$ .

Разрешающая способность:  $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = m \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$ . Угловая дисперсия:  $D_{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = -\frac{m}{2d \sin \vartheta} = -\frac{\text{ctg } \vartheta}{\lambda}$ .

Для пластинки Льюммера-Герке:  $d \Rightarrow nd$ ,  $\sin \vartheta \cong \sin \vartheta_0 = 1/n$ .

## Интерферометр Майкельсона ( $\Delta l$ , $\vartheta$ , $m$ )



**Аппаратная функция** – уравнение двухволновой интерференции:

$$I(\vartheta) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta(\vartheta)), \quad \Delta(\vartheta) = 2\Delta l \cos \vartheta.$$

**Условие максимумов:**  $2\Delta l \cos \vartheta = m\lambda$ .

**Условие минимумов:**  $2\Delta l \cos \vartheta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ .

**Порядок интерференции:**  $m = \frac{2\Delta l \cos \vartheta}{\lambda}$ .

**Область свободной дисперсии:**  $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$ ,  $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$ .

**Предел разрешения:**  $m(\lambda + \delta\lambda) = (m + 1/2)\lambda$ ,  $\delta\lambda = \frac{\lambda}{2m}$ .

**Разрешающая способность:**  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = 2m$ .

**Угловая дисперсия:**  $D_\vartheta \equiv \frac{d\vartheta}{d\lambda} = -\frac{m}{2\Delta l \sin \vartheta} = -\frac{1}{\lambda \operatorname{tg} \vartheta}$ .

## Основные характеристики спектральных приборов

(порядок интерференции –  $m$ , область свободной дисперсии –  $\Delta\lambda$ , предел разрешения –  $\delta\lambda$ , разрешающая способность –  $R$ , угловая дисперсия –  $D_{\vartheta}$ )

Спектральный прибор	Параметры прибора	$N$	$m$	$\Delta\lambda, \text{Å}$	$\delta\lambda, \text{Å}$	$R$	$D_{\vartheta}, \text{рад/м}$	Прибор
Призма	$\Delta l = 1 \text{ см}, d = 0.5 \text{ см},$ $\frac{dn}{d\lambda} = -10^5 \text{ м}^{-1}$	$\infty$	0	$\infty$	5	$10^3$	$-2 \cdot 10^5$	Дисп.
Дифракционная решетка	$L = 10 \text{ см},$ $N = 10^5, m = 3$	$10^5$	3	<b>1700</b>	0.0170	$3 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^6$	Дифр.
Эшелон Майкельсона	$n = 1.5, h = 1 \text{ см},$ $d = 0.5 \text{ см}, N = 30$	30	$10^4$	0.5	0.0170	$3 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^6$	Дифр.
Интерферометр Фабри-Перо	$D = 2.5 \text{ см}, L = 15 \text{ см},$ $N = 30, R = 0,9$	30	$10^5$	<b>0.05</b>	0.0017	<b><math>3 \cdot 10^6</math></b>	$-2 \cdot 10^7$	Интерф.
Пластина Люммера-Герке	$n = 1.5, d = 1 \text{ см},$ $L = 20 \text{ см}, R = 0,9$	11	$3 \cdot 10^4$	<b>0.16</b>	0.0042	<b><math>1.2 \cdot 10^6</math></b>	$-2 \cdot 10^6$	Интерф.
Интерферометр Майкельсона	$\Delta l = 25 \text{ см}, \vartheta \sim 0$	2	$\sim 10^6$	<b><math>\sim 0.005</math></b>	$\sim 0.0025$	<b><math>\sim 2 \cdot 10^6</math></b>	$\sim -\infty$	Интерф.

Для  $\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ .

## ОСНОВЫ

### ДИФРАКЦИОННОЙ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

(1872 г. – немецкий физик-оптик Эрнст Карл Аббе)

**Первый этап:** линза в своей фокальной плоскости осуществляет пространственный Фурье-анализ светового поля светящегося объекта.

**Второй этап:** в процессе свободной дифракции осуществляется пространственный Фурье-синтез изображения (расходящихся волн).

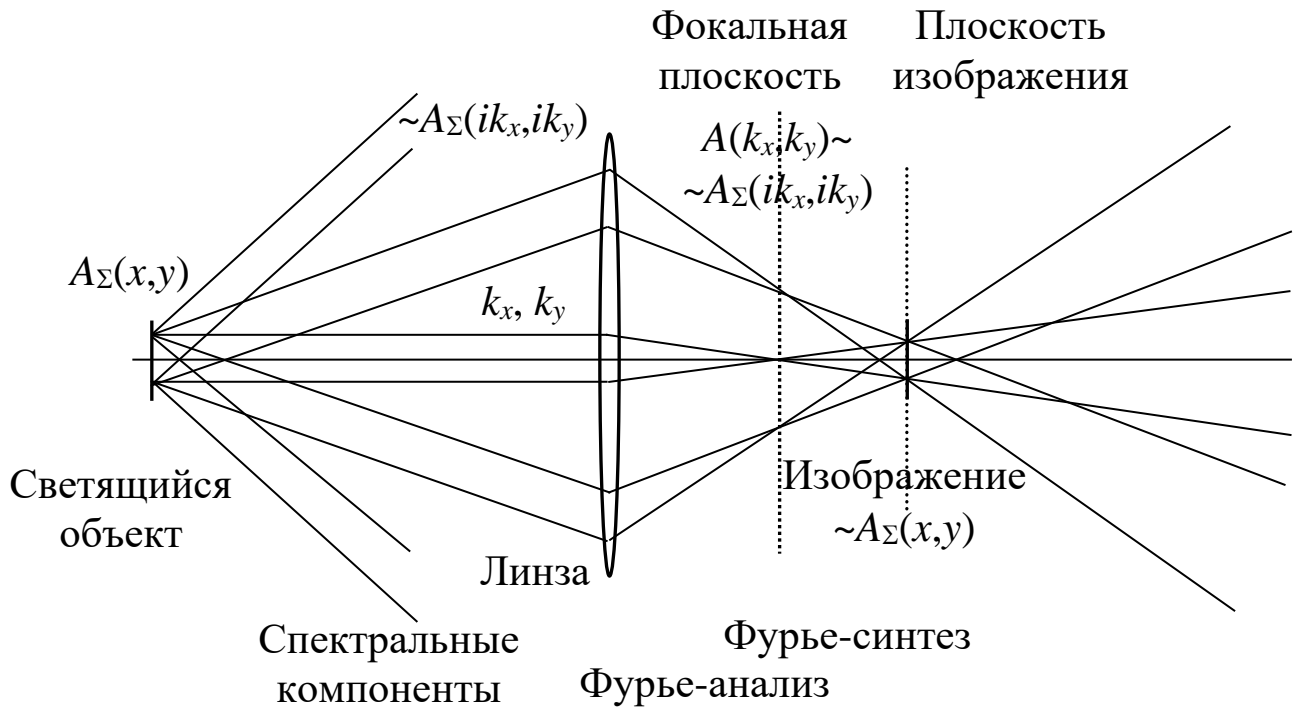


Рис. Схема формирования изображения по Аббе

$$A(k_x, k_y) = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy = \frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{-ikb}}{b} A_{\Sigma}(ik_x, ik_y),$$

$$I(k_x, k_y) = \frac{1}{2} |A(k_x, k_y)|^2 = \frac{1}{2\lambda^2 b^2} |A_{\Sigma}(ik_x, ik_y)|^2,$$

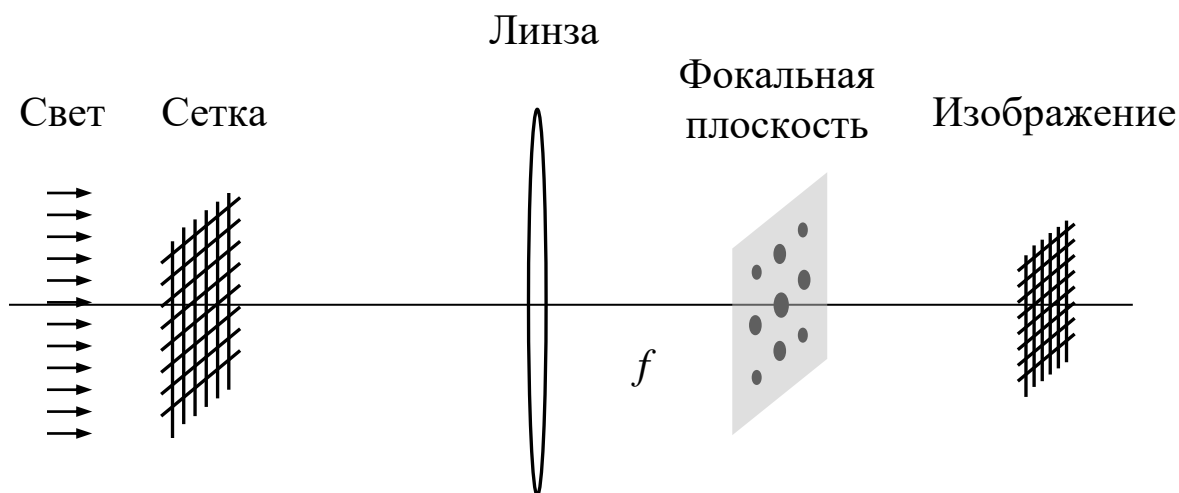
$$A_{\Sigma}(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(ik_x, ik_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

Решая уравнение Гельмгольца –  $(\Delta + k^2)A(x, y, z) = 0$ :

$$A(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Sigma}(ik_x, ik_y) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y.$$

**Пространственная фильтрация изображения** – изменение изображения объекта посредством модификации пространственных спектральных компонент светового поля объекта.

### Схема опыта Аббе-Портера.



Расстояния между пятнами определяются периодами  $d_{x,y}$  сетки (чем больше период, тем меньше расстояние) –  $\frac{\lambda}{d_{x,y}} f$ .

Размеры пятна определяются размерами  $L_{x,y}$  освещаемой части сетки (чем больше размер, тем меньше пятно) –  $\frac{\lambda}{L_{x,y}} f$ .

Здесь  $f$  – фокусное расстояние линзы.

Если в фокальной плоскости помещают узкую щель, то в плоскости изображения наблюдают систему полос, вытянутых перпендикулярно щели.

Если поместить ирисовую диафрагму (непрозрачный экран с отверстием переменного диаметра) в центре фокальной плоскости, то, изменяя ее диаметр, можно шаг за шагом проследить Фурье-синтез изображения.

Если в центре фокальной плоскости поместить маленький непрозрачный экран, закрывающий центральное пятно Фурье-спектра, то получим изображение сетки с обращенным контрастом.

Если в центре непрозрачного экрана в фокальной плоскости оставить малое отверстие, то получим практически равномерно засвеченный экран.

## Специальные методы наблюдения фазовых объектов

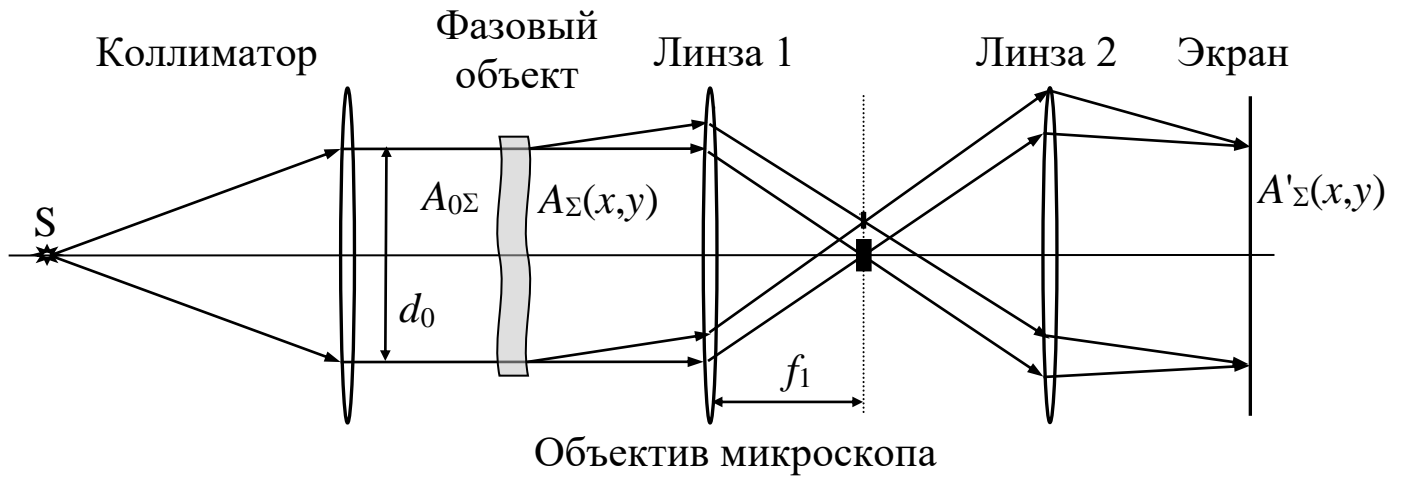
Рассмотрим фазовые объекты, которые практически не поглощают свет  $|t(x,y)| \sim 1$  и слабо меняют его фазу  $|\Phi(x,y)| \ll 1$ :

$$t(x,y) = |t(x,y)|e^{-i\Phi(x,y)} \cong 1 - i\Phi(x,y); \quad A_{0\Sigma}(x,y) \cong A_{0\Sigma} - \text{const}(x,y);$$

$$A_{\Sigma}(x,y) \cong A_{0\Sigma}(1 - i\Phi(x,y)) = A_{0\Sigma} - iA_{0\Sigma}\Phi(x,y),$$

$$I_{\Sigma}(x,y) = \frac{1}{2}|A_{\Sigma}|^2 = I_{0\Sigma}|t(x,y)|^2 \cong I_{0\Sigma}(1 + \Phi^2(x,y)) \cong I_{0\Sigma}.$$

Схема наблюдения объекта в микроскопе



### А. Метод темного поля

В заднем фокусе объектива микроскопа – непрозрачный диск, закрывающий кружок Эйри радиуса  $r_d = \vartheta_d f_1 \cong 1.22 \cdot \lambda / d_0 \cdot f_1$ :

$$A'_{\Sigma}(x,y) \cong A_{0\Sigma} - iA_{0\Sigma}\Phi(x,y) - A_{0\Sigma} \cong -iA_{0\Sigma}\Phi(x,y).$$

$$I'_{\Sigma}(x,y) \cong I_{0\Sigma}\Phi^2(x,y).$$

### Б. Метод фазового контраста (Фриц Цернике, 1934 г)

Фазовый рельеф преобразуется в амплитудный рельеф с помощью фазовой пластинки, перекрывающей кружок Эйри. Пластика толщиной  $d = (2k + 1) \frac{\lambda_0}{4(n - n_0)}$  осуществляет изменение фазы  $\Delta\varphi$ :

$$\Delta\varphi = k_0(n - n_0)d = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n - n_0)d = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad e^{-i\Delta\varphi} = e^{-i(2k+1)\frac{\pi}{2}} = -i(-1)^k;$$

$$A'_{\Sigma}(x,y) \cong -i(-1)^k A_{0\Sigma} - iA_{0\Sigma}\Phi(x,y) = -iA_{0\Sigma}((-1)^k + \Phi(x,y)),$$

$$I'_{\Sigma}(x,y) \cong I_{0\Sigma}(1 + 2(-1)^k \Phi(x,y)).$$

При  $k = 2l + 1$  – темный, а при  $k = 2l$  – светлый фазовый контраст.

## Роль дифракции в приборах, формирующих изображение

Конечная апертура линзы улавливает конечную полосу пространственных частот спектра излучения объекта.

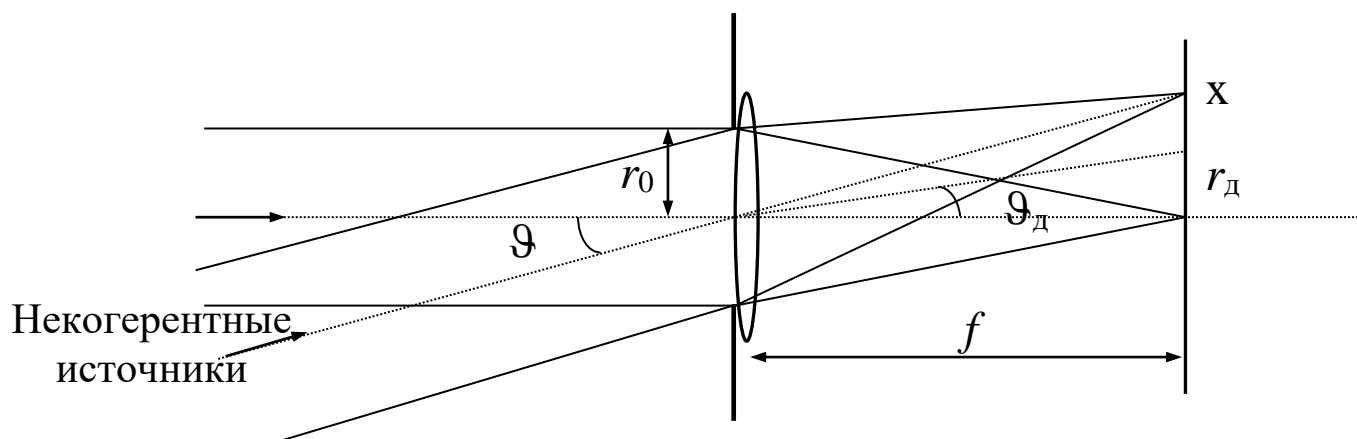
Изображением светящейся точки в сопряженной плоскости является дифракционная картина, состоящая из concentric rings, окружающих центральный светлый кружок (пятно) – **кружок Эйри**. Изображение объекта есть наложение таких кружков и дифракционных колец.

Разрешающая способность оптических приборов ограничивается дифракцией Фраунгофера на их входной апертуре.

**Предел углового (линейного) разрешения оптического прибора**  $\delta\vartheta$  ( $\delta l$ ) – минимальное угловое (линейное) расстояние между двумя светящимися точками объекта, которые разрешает прибор.

**Разрешающая способность (сила) оптического прибора**  $R$  – величина, обратная пределу разрешения –  $R = 1/\delta\vartheta$  ( $R = 1/\delta l$ ).

**Телескоп** – оптический прибор для наблюдения далеких объектов с малыми угловыми размерами.



Волны плоские –  $a \gg r_0^2 / \lambda$ , пространственно когерентные –  $\Omega < \lambda / d_0$ .

В соответствии с критерием Рэля:  $\delta\vartheta = \vartheta_d = 0.61 \frac{\lambda}{r_0}$ ,  $R_\vartheta = \frac{r_0}{0.61\lambda}$ .

**Оценки.** Для телескопа радиуса  $r_0 = 2$  м и длины волны регистрируемого светового излучения  $\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6}$  м:

$$\delta\vartheta = 0.61 \frac{\lambda}{r_0} = 0.61 \frac{0.5 \cdot 10^{-6}}{2} \cdot \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{3.14} \cong 0.03'', \quad R_\vartheta = \frac{1}{\delta\vartheta} \cong 7 \cdot 10^6 \text{ рад}^{-1}.$$

Для глаза радиус зрачка  $r_0 = 2$  мм:

$$\delta\vartheta = 0.61 \frac{\lambda}{r_0} = 0.61 \frac{0.5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{3.14} \cong 30'', \quad R_\vartheta = \frac{1}{\delta\vartheta} \cong 7 \cdot 10^3 \text{ рад}^{-1}.$$



## Микроскоп

(оптический прибор для изучения объектов малых размеров)

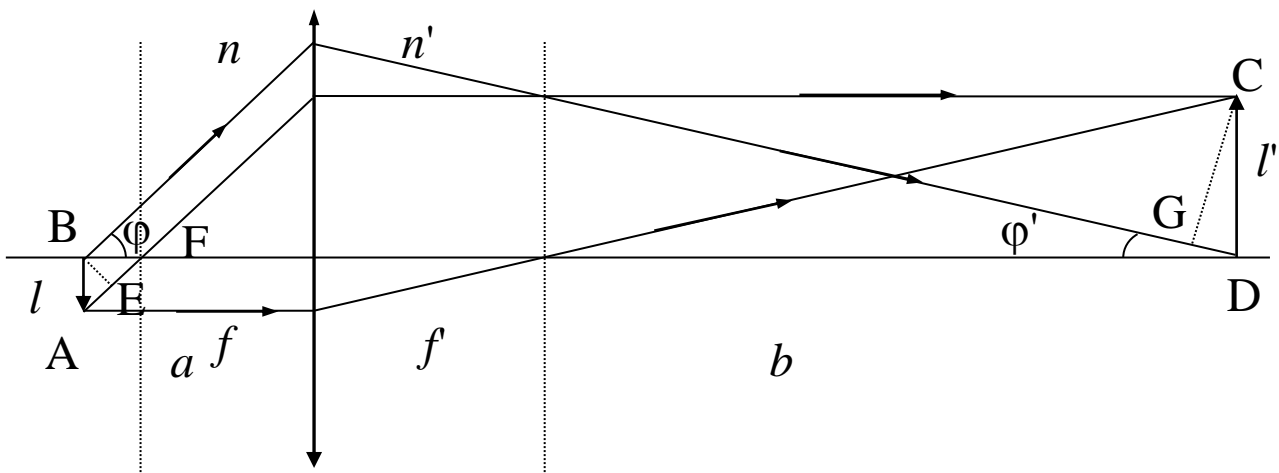
### Уравнение синусов Аббе

В случае **стигматических** изображений, когда каждой светящейся точке объекта соответствует одна точка изображения, оптические длины всех лучей, соединяющих определенные сопряженные точки объекта и его изображения, одинаковы.

Найдем условие, при котором оптические длины для лучей, соединяющих любые сопряженные точки одинаковы. Это будет происходить при условии достаточно малого поперечного размера (высоты) объекта  $l \ll a - f$  (см. рис.):

$$\begin{aligned} \Delta(AFC) - \Delta(BFD) &= \Delta(AF) + \Delta(FC) - \Delta(BF) - \Delta(FD) = \Delta(AF) - \Delta(BF) = \\ &= n\sqrt{(a-f)^2 + l^2} - n(a-f) \cong n\frac{l^2}{2(a-f)} \ll \frac{\lambda_0}{2} \text{ или} \end{aligned}$$

$$l \ll \sqrt{\frac{\lambda_0}{n}(a-f)} = \sqrt{\lambda(a-f)}.$$



Рассмотрим параллельный пучок лучей, испущенных объектом под произвольным углом  $\phi$  к оптической оси. Параллельность рассматриваемого пучка после прохождения линзы нарушится, однако ввиду малой высоты объекта и того, что при  $a - f \ll a$  и  $b \gg f$ , будем считать, что это расхождение мало и что лучи наклонены одинаково к оптической оси под малым углом  $\phi' \ll 1$ . Запишем условие равенства оптических длин хода:

$$\Delta(AEC) = \Delta(AE) + \Delta(EC) = \Delta(BGD) = \Delta(BG) + \Delta(GD).$$

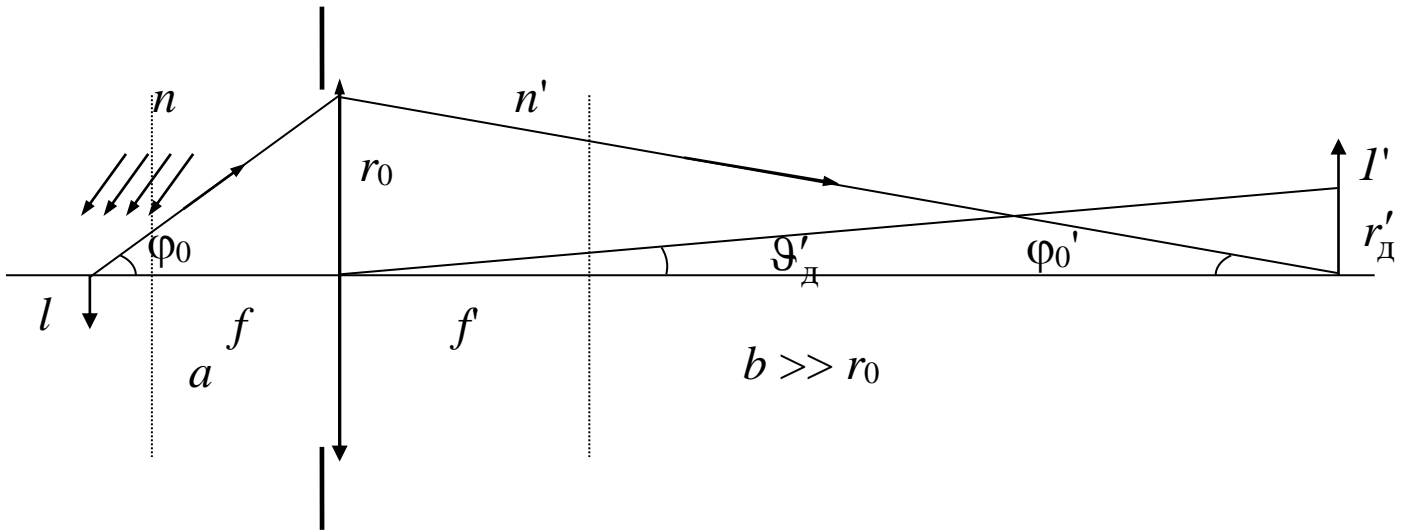
С учетом  $\Delta(EC) = \Delta(BG)$ :  $\Delta(AE) = \Delta(GD)$ .

В результате получим **уравнение синусов Аббе**:

$$nl \sin \phi = n'l' \sin \phi'.$$

## Микроскоп

### 1. Некогерентное освещение объекта – идея как для телескопа.



Условие разрешения:  $l' \geq r'_d = \vartheta'_d b = 0.61 \frac{\lambda'}{r_0} b \cong 0.61 \frac{\lambda_0}{n' \sin \varphi'_0}$ .

С учетом уравнения синусов Аббе  $nl \sin \varphi_0 = n'l' \sin \varphi'_0$  ( $\Delta - const$  при  $l \ll \sqrt{\lambda(a-f)}$ ) и  $b \gg r_0$  ( $\varphi_0$  – любой,  $\varphi'_0 \ll 1$ ):

$$l \geq 0.61 \frac{\lambda_0}{n \sin \varphi_0} = \delta l,$$

$$\delta l = 0.61 \frac{\lambda_0}{n \sin \varphi_0} = 0.61 \frac{\lambda}{\sin \varphi_0}, \quad R \equiv \frac{1}{\delta l} = \frac{n \sin \varphi_0}{0.61 \lambda_0}.$$

Здесь  $n \sin \varphi_0$  – **числовая апертура объектива**.

Как видим, **угловая апертура**  $\varphi_0$  лучей, формирующих изображение, должна быть как можно больше.

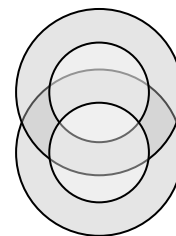
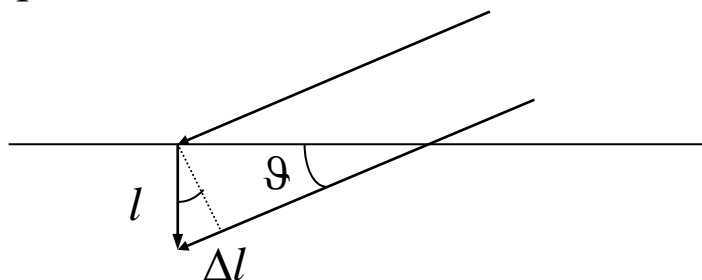
Для повышения разрешающей способности микроскопа применяют также **иммерсию** – заполнение пространства между покровным стеклом, на котором размещается исследуемый объект, и фронтальной линзой объектива прозрачной жидкостью с возможно большим значением показателя преломления  $n$ .

**Оценим** предел линейного разрешения при  $n \sim 1.5$  и  $\varphi_0 \sim \pi/6$ :

$$\delta l = 0.61 \frac{\lambda_0}{n \sin \varphi_0} \cong \frac{0.61}{1.5 \cdot 0.5} \lambda_0 \cong 0.8 \lambda_0 \cong 0.8 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0.4 \text{ мкм}.$$

Дальнейшее уменьшение разрешающей способности возможно только при уменьшении длины волны.

## 2. Когерентное освещение объекта.



Пусть поверхность объекта освещается плоской монохроматической волной под углом  $\vartheta$  к нормали к плоскости объекта, тогда, если  $l$  – расстояние между светящимися точками, то разность фаз между волнами приходящими к этим вторичным источникам будет равна:

$$\Delta\varphi = k\Delta l = kl \sin \vartheta = \frac{2\pi}{\lambda} l \sin \vartheta,$$

где  $\Delta l$  – разность хода волн,  $\lambda$  – длина волны в среде со стороны объекта.

Такова же будет и разность фаз между колебаниями, приходящими в область пересечения дифракционных кружков Эйри от двух вторичных когерентных источников. Интенсивность в этой области будет описываться уравнением двухволновой интерференции:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi).$$

Меняя угол наклона  $\vartheta$ , можно менять разрешающую способность объектива. Если интерференционный член будет положительным, то разрешение ухудшится, если отрицательным – улучшится.

$$\text{При } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} l \sin \vartheta = (2m+1)\pi, \quad \sin \vartheta = \frac{(2m+1)}{2} \cdot \frac{\lambda}{l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

что возможно лишь при  $l \geq \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_0}{2n} = l_{\min}$ , в области пересечения дифракционных кружков Эйри от двух вторичных источников всегда будет малая интенсивность  $(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ ; разделение максимумов будет выражено особенно отчетливо и разрешение повысится примерно

$$\text{вдвое: } \delta l = l_{\min} \cong \frac{\lambda_0}{2n} \cong 0.33\lambda_0 \cong 0.33 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} \cong 0.17 \text{ мкм.}$$

Таким образом, применение подобранного наклонного освещения когерентным источником приводит к повышению разрешающей способности микроскопа.

## Запись и восстановление светового поля.

### Голография

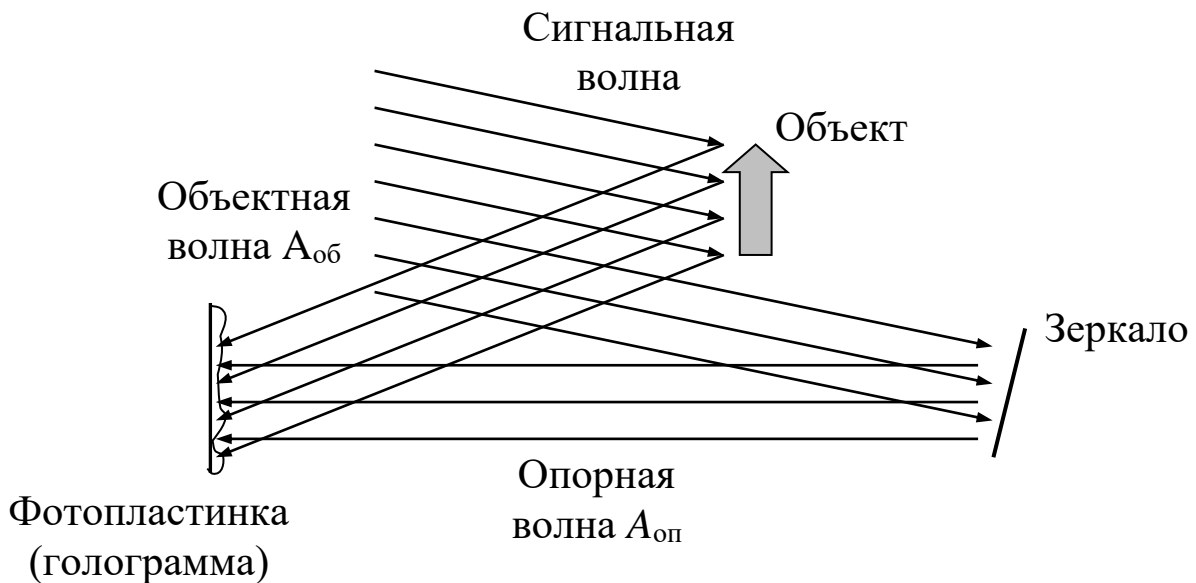
Идея голографии – 1920 г, польский физик Мечислав Вольфке.

Идея голографии и ее обоснование – 1948 г, английский ученый венгерского происхождения Деннис Габор (Нобелевская премия 1971 г).

Основная идея – фотографируется не само **объектное** световое поле  $A_{об}$ , идущее от светящегося объекта, а картина интерференции этого поля с когерентной опорной волной  $A_{оп}$  (см. рис.).

Картина интерференции объектной и опорной волн, записанная на фотопластинку, называется **голограммой**.

Схема записи светового поля



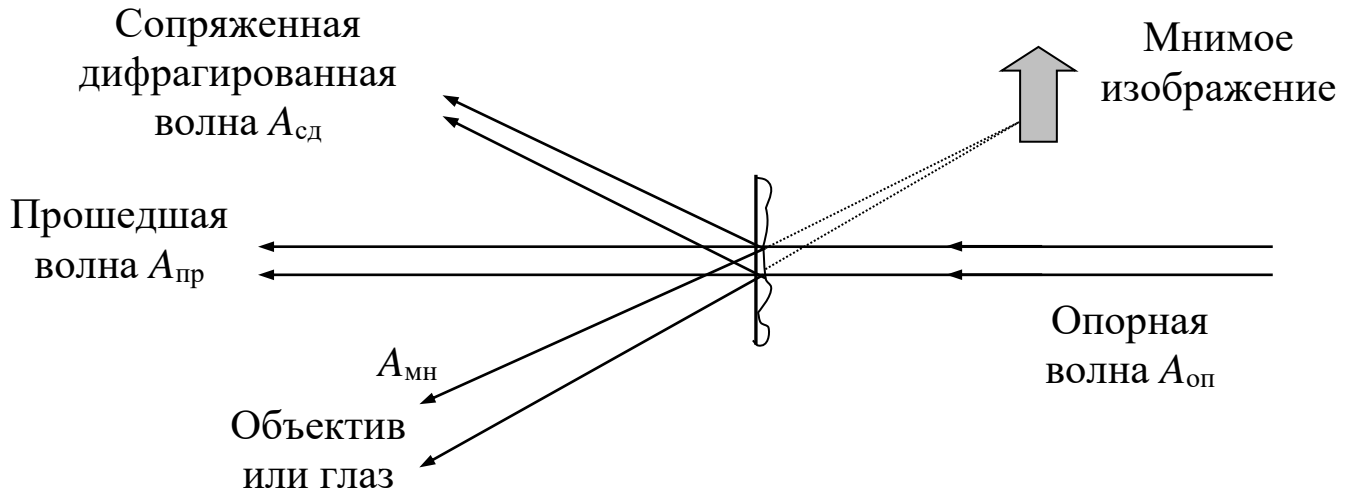
Амплитуда светового поля в плоскости фотопластинки –  $A(x, y) = A_{об}(x, y) + A_{оп}$ , а распределение интенсивности –

$$I(x, y) = \frac{1}{2} |A(x, y)|^2 = \frac{1}{2} |A_{оп} + A_{об}|^2 = I_{оп} + I_{об} + \frac{1}{2} A_{оп} A_{об}^* + \frac{1}{2} A_{оп}^* A_{об}.$$

Это распределение интенсивности фиксируется на фотопластинке. Важно, что в этом выражении есть слагаемые, содержащие информацию о фазе объектной волны.

Для восстановления светового поля голограмму освещают опорной волной  $A_{оп}$ . В результате дифракции опорной волны на голограмме возникает несколько световых волн, одна из которых в точности повторяет поле предметной волны.

### Схема восстановления светового поля



Функция пропускания света голограммой –  $t(x,y) = 1 - \alpha I(x,y)$ , поскольку зачернение, полученное при экспонировании фотопластинки, пропорционально интенсивности излучения  $I(x,y)$ , а величина коэффициента  $\alpha$  зависит от чувствительности пластинки, времени экспонирования и интенсивности сигнальной волны. Световое поле, образованное на задней поверхности голограммы:

$$\begin{aligned}
 A'(x,y) &= A_{оп} t(x,y) = A_{оп} - \alpha I(x,y) A_{оп} = \\
 &= A_{оп} - \alpha \left( I_{оп} A_{оп} + I_{об} A_{оп} + \frac{1}{2} A_{оп}^2 A_{об}^* + I_{оп} A_{об} \right) = \\
 &= (1 - \alpha I_{оп} - \alpha I_{об}) A_{оп} - \frac{\alpha}{2} A_{оп}^2 A_{об}^* - \alpha I_{оп} A_{об} = A_{пр} + A_{сд} + A_{мн}.
 \end{aligned}$$

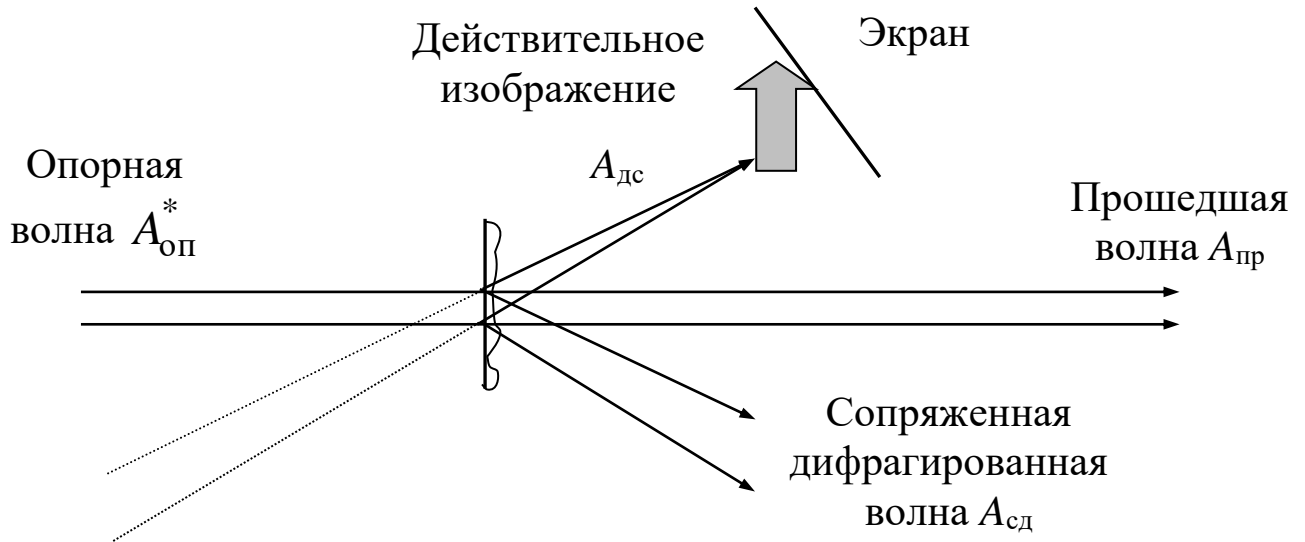
**Прошедшая волна  $A_{пр} = (1 - \alpha I_{оп} - \alpha I_{об}) A_{оп}$  в результате свободной дифракции распространяется в прямом направлении и с точностью до константы воспроизводит опорную волну.**

Волна  $A_{мн} = -\alpha I_{оп} A_{об}$  с точностью до константы повторяет объектное волновое поле и несет **мнимое изображение объекта**.

**Сопряженная дифрагированная волна  $A_{сд} = \frac{\alpha}{2} A_{оп}^2 A_{об}^*$  несет в себе трансформированную информацию о действительном изображении объекта.** ( $k_{x,y}^{мн} = k_{x,y}^{об}$ ,  $k_{x,y}^{сд} = -k_{x,y}^{об}$ ,  $k^{мн} = k^{сд} = k^{об} = 2\pi / \lambda$ ).

Для восстановления светового поля голограмму можно освещать также и опорной волной, направленной в противоположную сторону опорной волны, использованной при записи светового поля (см. рис.).

Схема восстановления светового поля



В результате для светового поля, образованного на передней поверхности голограммы получим:

$$\begin{aligned}
 A'(x, y) &= A_{оп}^* t(x, y) = A_{оп}^* - \alpha I(x, y) A_{оп}^* = \\
 &= A_{оп}^* - \alpha \left( I_{оп} A_{оп}^* + I_{об} A_{оп}^* + I_{оп} A_{об}^* + \frac{1}{2} A_{оп}^{*2} A_{об} \right) = \\
 &= (1 - \alpha I_{оп} - \alpha I_{об}) A_{оп}^* - \alpha I_{оп} A_{об}^* - \frac{1}{2} \alpha A_{оп}^{*2} A_{об} = A_{пр} + A_{дс} + A_{сд}.
 \end{aligned}$$

Как видим, в этом случае можно наблюдать действительное изображение объекта.

При обычном некогерентном освещении голограмма выглядит как почти однотонная мутноватая пластинка.

## Классификация голограмм

Свойства голограмм существенно зависят от:

- геометрической конфигурации и физических свойств светочувствительной среды, в которой осуществляется запись;
- взаимного расположения голограммы, объекта и источника опорной волны;
- физической природы (световой, радио-, акустической) волнового поля, записываемого на голограмме.

В зависимости от геометрической конфигурации светочувствительной среды, в которой зарегистрирована интерференционная картина, различают двумерные и трёхмерные голограммы.

**Двухмерная голограмма** относится к тому случаю, когда толщина фотоматериала  $h$  много меньше пространственного периода  $\Lambda$  регистрируемой интерференционной картины от суперпозиции объектной  $A_{об}(x,y)$  и опорной  $A_{оп}$  волн. Отображающие свойства двумерной голограммы ограничены. В частности, она неоднозначно восстанавливает волновое поле излучения объекта: кроме истинной объектной волны  $A_{об}(x,y)$  и соответствующего ей истинного изображения объекта в этом случае восстанавливается так называемая сопряжённая дифрагированная волна  $A_{д}(x,y)$  и соответствующее ей сопряжённое изображение. Источник  $S$ , с помощью которого восстанавливается двумерная голограмма, должен быть строго монохроматичным, поскольку двумерная голограмма восстановит все соответствующие разным  $\lambda$  изображения, и, как следствие этого, результирующее изображение будет сильно размазано, поскольку падающая волна не будет обладать достаточной степенью временной когерентности.

**Трёхмерная голограмма**, у которой толщина  $h$  много больше  $\Lambda$ , представляет собою наиболее общий случай голографической записи<sup>1</sup>. Она однозначно восстанавливает волновое поле объекта – сопряжённая волна  $A_{д}$  и соответствующее ей сопряжённое изображение отсутствуют. Особенностью трёхмерной голограммы является также способность воспроизводить не только фазу и амплитуду записанного на ней излучения, но и его спектральный состав. Оказывается, что если такую голограмму восстановить источником излучения со

---

<sup>1</sup> Голографический метод с записью в трехмерных средах предложил и обосновал советский физик Юрий Николаевич Денисюк в 1962 г.

сплошным спектром (например, лампой накаливания), то она сама выберет из сплошного спектра те составляющие, которые участвовали в её записи.

Свойство спектральной селективности трёхмерной голограммы обусловлено интерференцией волн, отражённых трёхмерной последовательностью пучностей, зарегистрированной на голограмме стоячей волны (трёхмерной последовательностью почернений). Эти волны складываются синфазно и взаимно усиливают друг друга только для одной монохроматической составляющей – той, которой экспонировалась голограмма при её записи. Так как любая светочувствительная среда имеет конечную толщину, то все голограммы фактически трёхмерны. Трёхмерность голографической записи особенно выявляется в том случае, когда длина волны регистрируемого на голограмме излучения намного меньше толщины светочувствительного материала.

Схемы записи голограмм. В зависимости от взаимного расположения фотопластинки, объекта и опорного источника различают следующие схемы записи голограмм:

- схема во встречных пучках (схема Денисюка, 1977 г.),
- схема в попутных пучках (осевая и внеосевая схемы, схема Фурье).

В схеме во встречных пучках (схема Денисюка) объект  $O$  и опорный источник  $S$  находятся по разные стороны от голограммы. Период интерференционной картины  $\Lambda$  в этом случае минимален, а требования к разрешающей способности фотоматериала соответственно максимальны. Преимущества голограмм во встречных пучках заключаются в том, что сопряжённое изображение в этом случае отсутствует и для восстановления изображения необязателен когерентный источник – такую голограмму можно реконструировать источником естественного света, например лампой накаливания.

В случае схемы в попутных пучках объект  $O$  и опорный источник  $S$  расположены по одну сторону от голограммы. При этом осевой схемой, или схемой Габора, называют частный случай, когда при регистрации голограммы объект  $O$ , фотопластинка  $F$  и опорный источник  $S$  расположены на одной оси. Эта схема предъявляет наименьшие требования к разрешающей способности фотоматериала, т.к. пе-



риод интерференционной картины  $\Lambda$  на голограмме в этом случае максимален. К сожалению, поле, восстановленное полученной по этой схеме голограммой, сильно искажено благодаря наложению истинного и сопряжённого изображений. Этот недостаток устранён во внеосевой схеме (схеме Лейта), где угол между объектным и опорным лучами в точках их падения на голограмму отличен от 0.

Схема Фурье относится к случаю, когда объект  $O$  и опорный источник  $S$  расположены по одну сторону и на одинаковом расстоянии от голограммы. Особенностью этой схемы является простота и ясность математического аппарата, описывающего процессы записи и реконструкции голограммы.

Регистрирующие среды. Статические голограммы записывают в светочувствительных средах, которые в момент записи образуют так называемое скрытое изображение, выявляющееся только после специальной последующей обработки (проявления) фотоматериала. В голографии используют разнообразные светочувствительные среды. Наиболее высокочувствительные из них – галогенидо-серебряные. Разрешающая способность выполненных на их основе фотопластинок достигает нескольких тысяч линий на 1 мм при чувствительности порядка тысячной доли Дж на 1 см<sup>2</sup>. Фотопластинки с такой высокой разрешающей способностью используются в основном для записи трёхмерных отражательных голограмм. Для задач оптической обработки информации, а также радио- и акустических голограмм обычно применяются фотопластинки со значительно меньшим разрешением и соответственно более высокой светочувствительностью.

Для записи отражательных трёхмерных голограмм используются также слои бихромированной желатины. Голограммы, полученные на таких слоях, создают очень яркие изображения и, как правило, прозрачны во всех диапазонах спектра кроме той длины волны, на которой они были записаны. Это удобно при создании оптических голограммных элементов, которые фокусируют излучение в заданном участке спектра и прозрачны для остальных длин волн.

Для записи статических голограмм существуют также множество других способов, которые используются в специальных случаях. К ним относятся фотополимеры, фотохромные, магнитооптические и халькогенидные среды.