Материалы к Главе I

Основные уравнения классической электродинамики сплошных неподвижных сред

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D}(t,\boldsymbol{r}) = \rho(t,\boldsymbol{r}), \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r})}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r}) + \frac{\partial \boldsymbol{D}(t,\boldsymbol{r})}{\partial t}.$$

Уравнения Максвелла применимы для описания всех макроскопических электромагнитных явлений:

1) могут быть положены в основу теории излучения электромагнитных волн движущимися зарядами;

2) хорошо описывают быстропеременное электромагнитное поле, включая световые волны;

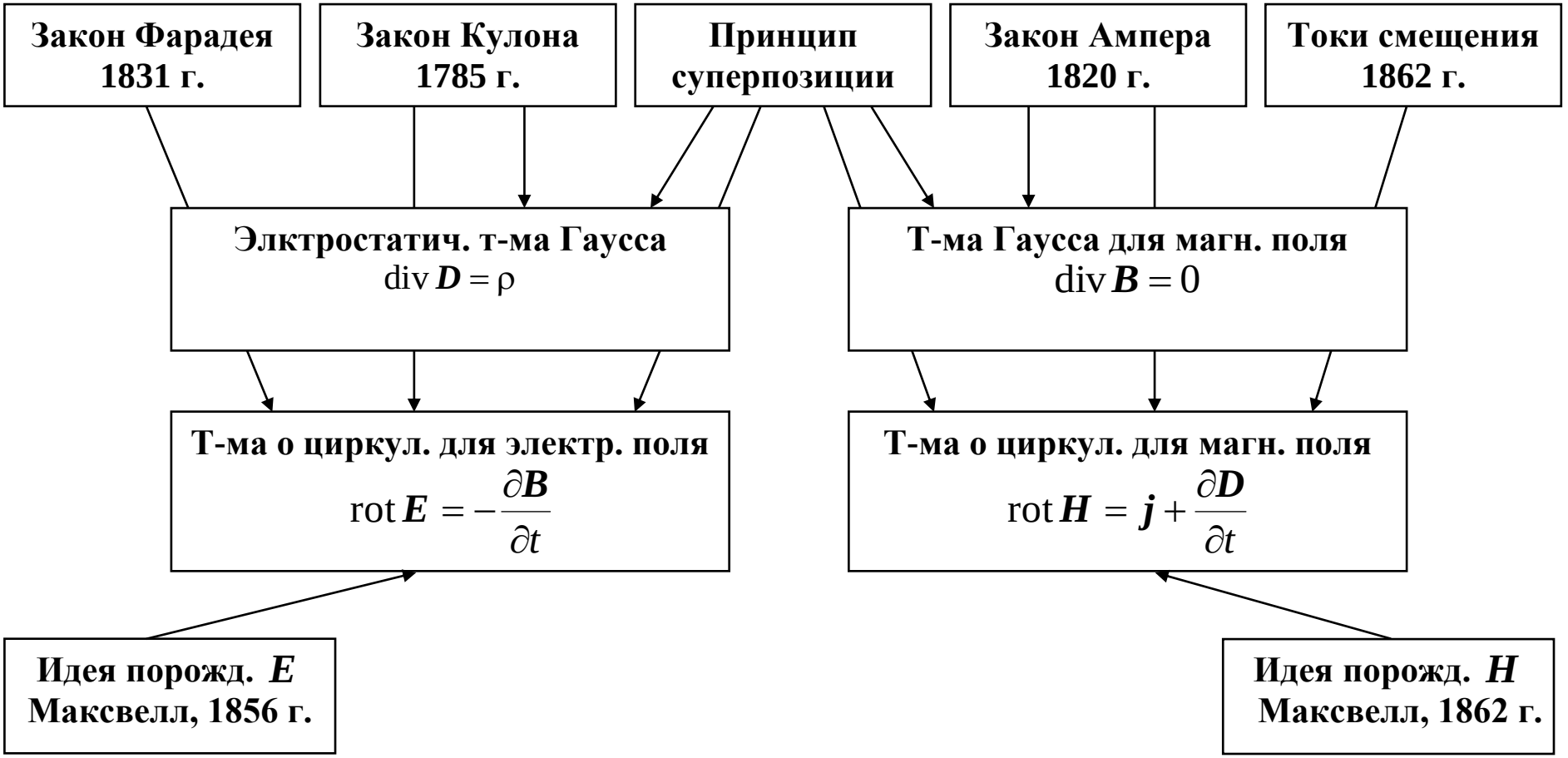
3) могут быть положены в основу теории взаимодействия света и вещества;

4) удовлетворяют условию релятивистской инвариантности.

Материальные уравнения для стационарных, линейных, изотропных, безынерционных и локальных сред

$$\boldsymbol{D}(t,\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}), \ \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r}) = \mu_0 \mu(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{r}), \ \boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r}) = \lambda(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}).$$

Основные полевые уравнения классической электродинамики. Уравнения Максвелла



Событие	Дата	Ученый
Предсказание электромагн. волн	**1862–1864 гг.**	**Джеймс Клерк Максвелл**
Электромагнитная теория света	**1867 г.**	**Людвиг Валентин Лоренц**
Эксп. док-во сущ. электромагн. волн	**1888 г.**	**Генрих Рудольф Герц**
Симметрич. форма ур-ий Максвелла	**1890 г.**	**Генрих Рудольф Герц**

Сферические волны являются решением волнового уравнения

Покажем прямым дифференцированием, что в случае сферических волн общим решением скалярного волнового уравнения будет

$$f(t,r)=\frac{f(t\mp r/\upsilon)}{r},$$

где $f(t\mp r/\upsilon)$ – произвольная достаточно число раз дифференцируемая скалярная функция. Действительно, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{f(t\mp r/\upsilon)}{r}\right)=\frac{f''}{r}$. В то же время, учитывая, что $\frac{\partial r}{\partial x_\alpha}=\frac{x_\alpha}{r}$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(t\mp r/\upsilon)}{r}\right)=\frac{f'\cdot\frac{\mp x}{\upsilon r}r-f\frac{x}{r}}{r^2}=\frac{\left(\mp\frac{1}{\upsilon}f'r-f\right)x}{r^3},$$

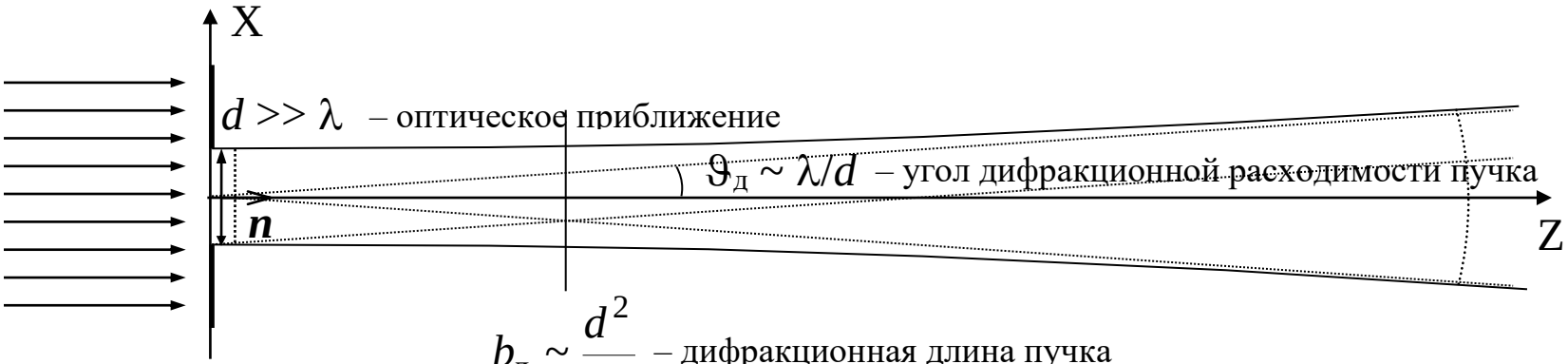
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{f(t\mp r/\upsilon)}{r}\right)=\frac{\frac{1}{\upsilon^2}f''r^2x^2\mp\frac{1}{\upsilon}f'r^3-fr^2\pm\frac{1}{\upsilon}f'x^2\cdot 3r+3fx^2}{r^5},$$

$$\Delta f(t\mp r/\upsilon)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)=\frac{\frac{1}{\upsilon^2}f''r^4}{r^5}=\frac{1}{\upsilon^2}\cdot\frac{f''}{r}=\frac{1}{\upsilon^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{f(t\mp r/\upsilon)}{r}\right).$$

Данное решение волнового уравнения описывает две волны. Первую из них (со знаком "–" в аргументе функции) – расходящуюся от начала координат, а вторую (со знаком "+" в аргументе функции) – сходящуюся к началу координат сферические волны с модулем скорости волнового фронта υ.

Модели реальных световых волн
Квазиплоская и квазисферическая гармонические волны (пучки)

Граничное условие: $f(t,x,y,0)=a(x,y)\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)$, **масштаб модуляции** $d >> \lambda \sim 0.5\cdot10^{-6}$ м.



Гармонические волны:

Квазиплоская – $0 \le z << b_д$ (зона геометрической оптики): $f(t,x,y,z)=a(x,y)\cdot\cos(\omega t-kz+\varphi_0)$.

Плоская – $0 \le z << b_д,\ R=\sqrt{x^2+y^2} << d$: $f(t,z)=a\cdot\cos(\omega t-kz+\varphi_0)$.

Квазисферическая – $z >> b_д$ (дальняя зона дифракции): $f(t,k_x,k_y,r)=\frac{a(k_x,k_y)}{r}\cdot\cos(\omega t-kr+\varphi_0)$.

Сферическая – $z >> b_д,\ R << \vartheta_д r \sim \lambda r/d$: $f(t,r)=\frac{a}{r}\cdot\cos(\omega t-kr+\varphi_0)$.

Плоская с убывающей амплитудой – $z >> b_д,\ R << \sqrt{r\lambda}$: $f(t,z)=\frac{a}{z}\cdot\cos(\omega t-kz+\varphi_0)$.

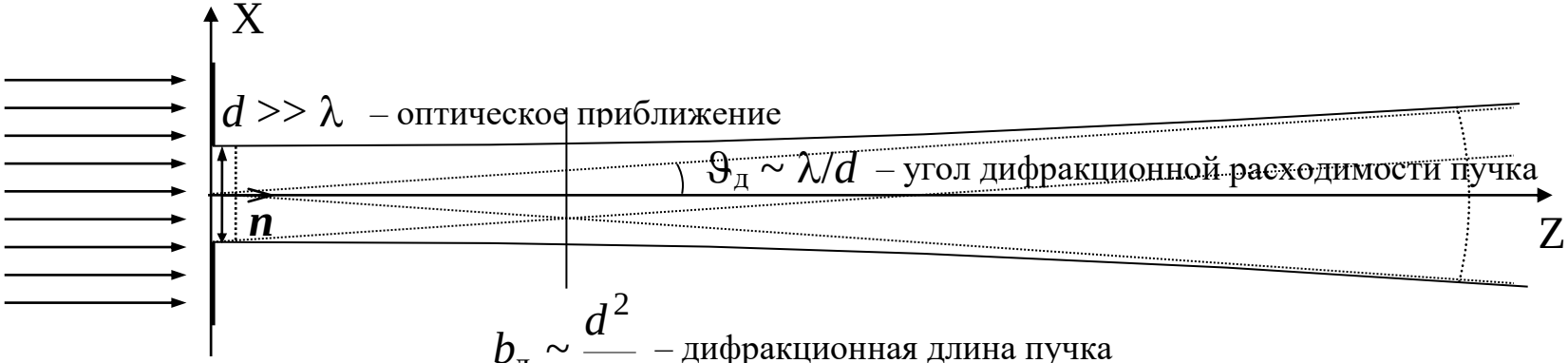
Плоская – $z >> b_д,\ R << \sqrt{r\lambda},\ \Delta z << z$: $f(t,z)=a\cdot\cos(\omega t-kz+\varphi_0)$.

Оценки для лазера с $\lambda \sim 0.5$ мкм и диаметром пучка d = 5 мм при r = 200 м:

$b_д \cong 12.5$ м, $\lambda r/d \cong 2$ см, $\sqrt{r\lambda} \cong 1$ см.

Квазигармонические волны (импульсы)

Граничное условие: $f(t,x,y,0)=a(t,x,y)\cdot\cos\left(\omega t+\varphi_0(t)\right)$, **время модуляции** $\tau >> T \sim 2\cdot10^{-15}$ с.



В амплитуде a и начальной фазе φ_0 добавить зависимость от $t-z/\upsilon$ или $t-r/\upsilon$.

Квазиплоская – $0\le z << b_д$: $f(t,x,y,z)=a(t-z/\upsilon,x,y)\cdot\cos\left(\omega t-kz+\varphi_0(t-z/\upsilon)\right).$

Плоская – $0\le z << b_д,\ R=\sqrt{x^2+y^2} << d$: $f(t,z)=a(t-z/\upsilon)\cdot\cos\left(\omega t-kz+\varphi_0(t-z/\upsilon)\right).$

Квазисферическая – $z >> b_д$: $f(t,k_x,k_y,r)=\dfrac{a(t-r/\upsilon,k_x,k_y)}{r}\cdot\cos\left(\omega t-kr+\varphi_0(t-r/\upsilon)\right).$

Сферическая – $z >> b_д,\ R << \vartheta_д r \sim \lambda r/d$: $f(t,r)=\dfrac{a(t-r/\upsilon)}{r}\cdot\cos\left(\omega t-kr+\varphi_0(t-r/\upsilon)\right).$

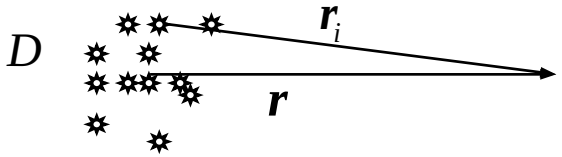
Плоская с убыв. амплитудой – $z >> b_д,\ R << \sqrt{r\lambda}$: $f(t,z)=\dfrac{a(t-z/\upsilon)}{z}\cdot\cos\left(\omega t-kz+\varphi_0(t-z/\upsilon)\right).$

Плоская – $z >> b_д,\ R << \sqrt{r\lambda},\ \Delta z << z$: $f(t,z)=a(t-z/\upsilon)\cdot\cos\left(\omega t-kz+\varphi_0(t-z/\upsilon)\right).$

Случайно модулированные волны

Источник (с линейными размерами $D \sim 10^{-3}$–10^{-2} м) – совокупность большого числа (10^{19}–10^{22} см$^{-3}$) одинаковых независимых элементарных (с размерами $d \sim 10^{-10}$ м) квазигармонических ($\tau \sim 10^{-11} \div 10^{-8}$ с $>> T \sim 2 \cdot 10^{-15}$ с) излучателей.

Совокупность квазигармонических сферических волн на расстояниях $r_i >> d$:



$$f(t,r) = \sum_i \frac{a_i(t - r_i/\upsilon)}{r_i} \cos\left(\omega t - k r_i + \varphi_{0i}(t - r_i/\upsilon)\right).$$

Сферическая – $r_i >> D >> d$, $r = \langle r_i \rangle$, статистическое поведение $\{a_i\}$ и $\{\varphi_{0i}\}$ волн излучателей:

$$f(t,r) \cong \frac{1}{r} \sum_i a_i(t - r_i/\upsilon) \cdot \cos\left(\omega t - kr + \varphi_0^i(t - r_i/\upsilon)\right) \cong \frac{\tilde{a}}{r} \cdot \cos\left(\omega t - kr + \tilde{\varphi}_0\right).$$

Плоская с убыв. амплитудой – $r_i >> D >> d$, $R << \sqrt{r\lambda}$:

$$f(t,r) \cong \frac{\tilde{a}}{z} \cdot \cos\left(\omega t - kz + \tilde{\varphi}_0\right).$$

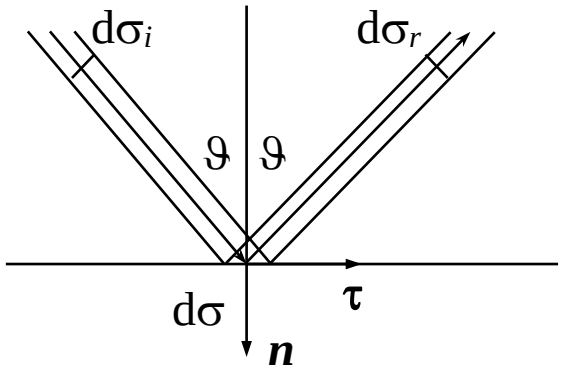
Плоская – $r_i >> D >> d$, $R << \sqrt{r\lambda}$, $\Delta z << z$:

$$f(t,r) \cong \tilde{a} \cdot \cos\left(\omega t - kz + \tilde{\varphi}_0\right).$$

Здесь: $\tilde{a}$ и $\tilde{\varphi}_0$ – случайным образом меняющиеся амплитуда и фаза.

Давление световой волны на поверхность тела

Рассмотрим электромагнитную волну (свет), которая падает (incident wave) на поверхность тела под некоторым углом ϑ и частично от нее отражается (reflected wave) с коэффициентом отражения по интенсивности R.



В соответствии с законом сохранения импульса при поглощении или отражении света телом последнему сообщается некоторый импульс, равный разности импульсов пучка света до и после поглощения или отражения.

Импульс волны, "приносимый" на поверхность $d\sigma$ за время dt:

$$d\boldsymbol{G}_i = \boldsymbol{g}_i d\sigma_i \upsilon dt = \frac{\langle w_i \rangle}{\upsilon} \boldsymbol{n}_i d\sigma_i \upsilon dt = \langle w_i \rangle \boldsymbol{n}_i d\sigma \cos\vartheta dt .$$

Импульс световой волны, "уносимый" с поверхности $d\sigma$ за время dt:

$$d\boldsymbol{G}_r = \boldsymbol{g}_r d\sigma_r \upsilon dt = \frac{\langle w_r \rangle}{\upsilon} \boldsymbol{n}_r d\sigma_r \upsilon dt = \langle w_r \rangle \boldsymbol{n}_r d\sigma \cos\vartheta dt .$$

Давление световой волны на поверхность:

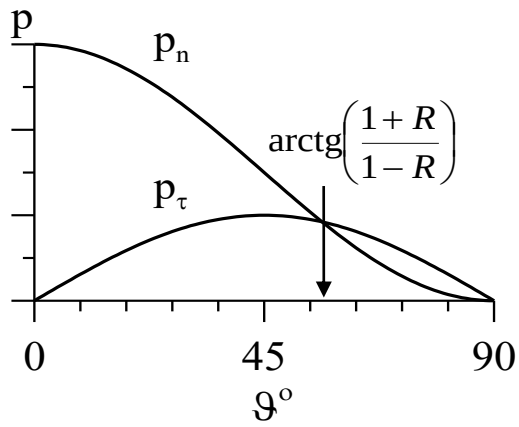
$$\boldsymbol{p} = \frac{d\boldsymbol{F} dt}{d\sigma dt} = \frac{d\boldsymbol{G}_i - d\boldsymbol{G}_r}{d\sigma dt} = \frac{\langle w_i \rangle \boldsymbol{n}_i d\sigma \cos\vartheta dt - \langle w_r \rangle \boldsymbol{n}_r d\sigma \cos\vartheta dt}{d\sigma dt} = \left(\langle w_i \rangle \boldsymbol{n}_i - \langle w_r \rangle \boldsymbol{n}_r\right)\cos\vartheta =$$

$$= \langle w_i \rangle \left(\boldsymbol{n}_i - R\boldsymbol{n}_r\right)\cos\vartheta = \frac{I}{\upsilon}\left(\boldsymbol{n}_i - R\boldsymbol{n}_r\right)\cos\vartheta .$$

В проекциях на оси, перпендикулярную n и параллельную τ плоскости падения:

$$p_n = \langle w_i \rangle (1+R)\cos^2\vartheta = \frac{I}{\upsilon}(1+R)\cos^2\vartheta ,$$

$$p_\tau = \langle w_i \rangle (1-R)\cos\vartheta\sin\vartheta = \frac{I}{\upsilon}(1-R)\cos\vartheta\sin\vartheta .$$



Оценка напряженности электрического поля, интенсивности и давления световых волн

1. Солнечная световая волна: $I = 1.4 \cdot 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

$$E_{0\text{эфф}} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0 \varepsilon \upsilon} I_{\text{эфф}}} \cong \sqrt{754 \cdot 1.4 \cdot 10^3} \cong 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}}. \; p_n = \frac{I}{\upsilon}(1+R)\cos^2 \vartheta = 2\frac{I}{\upsilon} \cong 2\frac{1.4 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \cong 10^{-5}\,\text{Па}.$$

2. Пучок гелий-неонового лазера: $P = 10^{-2}$ Вт, $r = 2$ мм.

$$I_{\text{эфф}} = \frac{P}{\sigma} = \frac{P}{\pi r^2} = \frac{10^{-2}}{3.14 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} \cong 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}, \; E_{0\text{эфф}} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0 \varepsilon \upsilon} I_{\text{эфф}}} \cong \sqrt{754 \cdot 10^3} \cong 870 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

3. Импульс лазера ($Y_3Al_5O_{12}$**:**Nd^{3+}): $W = 0.1$ Дж, $\tau = 10^{-8}$ с, $r = 1$ мм.

$$P_{\text{эфф}} = \frac{W}{\tau} = 10^7\,\text{Вт}, \; I_{\text{эфф}} = \frac{P_{\text{эфф}}}{\sigma} = \frac{P_{\text{эфф}}}{\pi r^2} = \frac{10^7}{3.14 \cdot 10^{-6}} \cong 3 \cdot 10^{12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2},$$

$$E_{0\text{эфф}} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0 \varepsilon \upsilon} I_{\text{эфф}}} \cong \sqrt{754 \cdot 3 \cdot 10^{12}} \cong 5 \cdot 10^7 \frac{\text{В}}{\text{м}} \; (> E_{\text{проб}} \sim 10^6\ \text{В/м}). \; p_n = 2\frac{I}{\upsilon} \cong 2 \cdot \frac{3 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^8} \cong 2 \cdot 10^4\,\text{Па}.$$

Сила давления на тело в пучке – $F_{\text{д}} = p_n \pi r^2 \cong 2 \cdot 10^4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-6}$ Н $\cong 6$ Г.

Предельный диаметр фокального пятна: $d_{\min} \sim \lambda \cong 0.5$ мкм.

Предельная длительность светового импульса: $\tau_{\min} \sim T \cong 2 \cdot 10^{-15}$ с.

Достигнутые характеристики:

- энергия импульса – $W \sim 10^5$ Дж (достаточно вскипятить ~300 г или испарить ~40 г воды),
- мощность – $P \sim 10^{15}$ Вт,
- интенсивность – $I \sim 10^{25}$ Вт/м^2,
- напряженность поля – $E \sim 10^{13}$ В/м ($> E_{\text{ат}} \sim 10^{12}$ В/м).

Замечание 1. Сила светового давления пропорциональна квадрату, а масса – кубу линейных размеров частицы. Это означает, что сила светового давления, приходящаяся на единицу массы частицы, (также, как и величина приобретаемого ускорения) изменяется обратно пропорционально линейным размерам частицы:

$$\frac{F_n}{m} \sim \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r} \xrightarrow[r\to 0]{} \infty .$$

Пусть у шарообразной частицы радиуса r = 1 мкм = 10^{-6} м плотность $\rho = 10^3$ кг/м^3. Сила солнечного давления на орбите Земли будет равна:

$$F_n = p_n \sigma = p_n \pi r^2 \cong 0.5 \cdot 10^{-5} \cdot 3.14 \cdot 10^{-12} \cong 1.5 \cdot 10^{-17} \text{Н}.$$

Величина приобретаемого ускорения –

$$a = \frac{F_n}{m} = \frac{F_n}{4/3\pi r^3 \rho} \cong \frac{1.5 \cdot 10^{-17} \cdot 3}{4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-18} \cdot 10^3} \cong 0.004 \text{ м/с}^2 .$$

Для частиц с r = ~1 мкм сила светового давления уравновесит силу притяжения Солнца.

Силы светового давления играют большую роль в астрофизике – обеспечивают стабильность звезд, препятствуя силам гравитации.

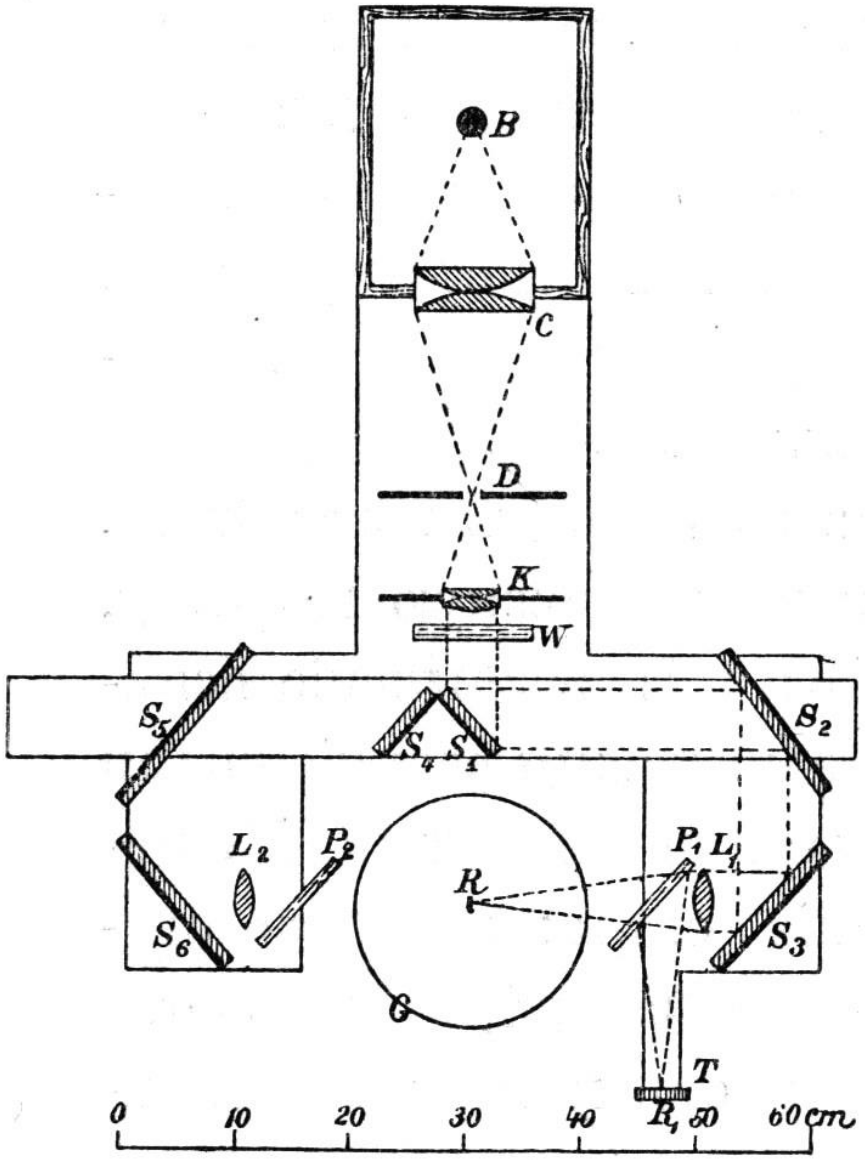
Замечание 2. В соответствии с квантово-механическими представлениями свет – это совокупность квантов энергии – **фотонов**. Энергия фотона связана с частотой света соотношением Эйнштейна:

$E_\gamma = \hbar\omega$, где $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с – приведенная постоянная Планка (постоянная Дирака).

Наличие светового давления заставляют признать, что фотоны обладают также и импульсом $\boldsymbol{g}_\gamma$. В соответствии с формулой для объемной плотности импульса $\boldsymbol{g} = \langle w \rangle / \upsilon$:

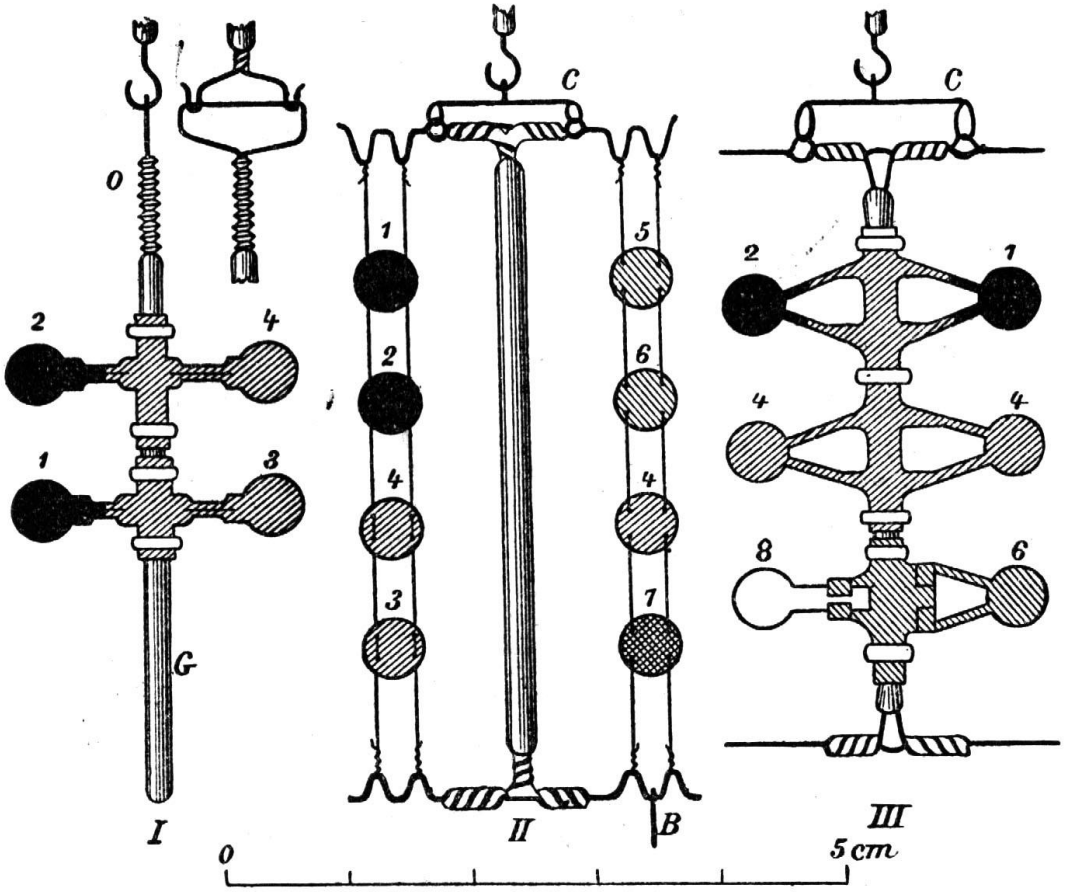
$$\boldsymbol{g}_\gamma = V\boldsymbol{g} = V\frac{\langle w \rangle}{\upsilon}\boldsymbol{n} = \frac{E_\gamma}{\upsilon}\boldsymbol{n} = \frac{\hbar\omega}{\upsilon}\boldsymbol{n} = \hbar k\boldsymbol{n} = \hbar\boldsymbol{k} .$$

Схема опыта Лебедева



B – источник света;
C – конденсор;
D – металлическая диафрагма;
K – линза;
W – стеклянный сосуд с водой с плоскопараллельными стенками, играющими роль светофильтра;
S_1–S_6 – зеркала;
L_1 и L_2 – линзы;
R – изображение диафрагмы D на "крылышках" (на рис. не показаны) внутри стеклянного баллона G;
P_1 и P_2 – стеклянные пластинки;
T – термобатарея;
R_1 – изображение.

**Различные системы (I, II, III) "крылышек"
в опыте Лебедева**



O – платиновая петля, C – кардановый подвес.

Фотография деталей прибора П.Н. Лебедева, служившего для опытов по световому давлению

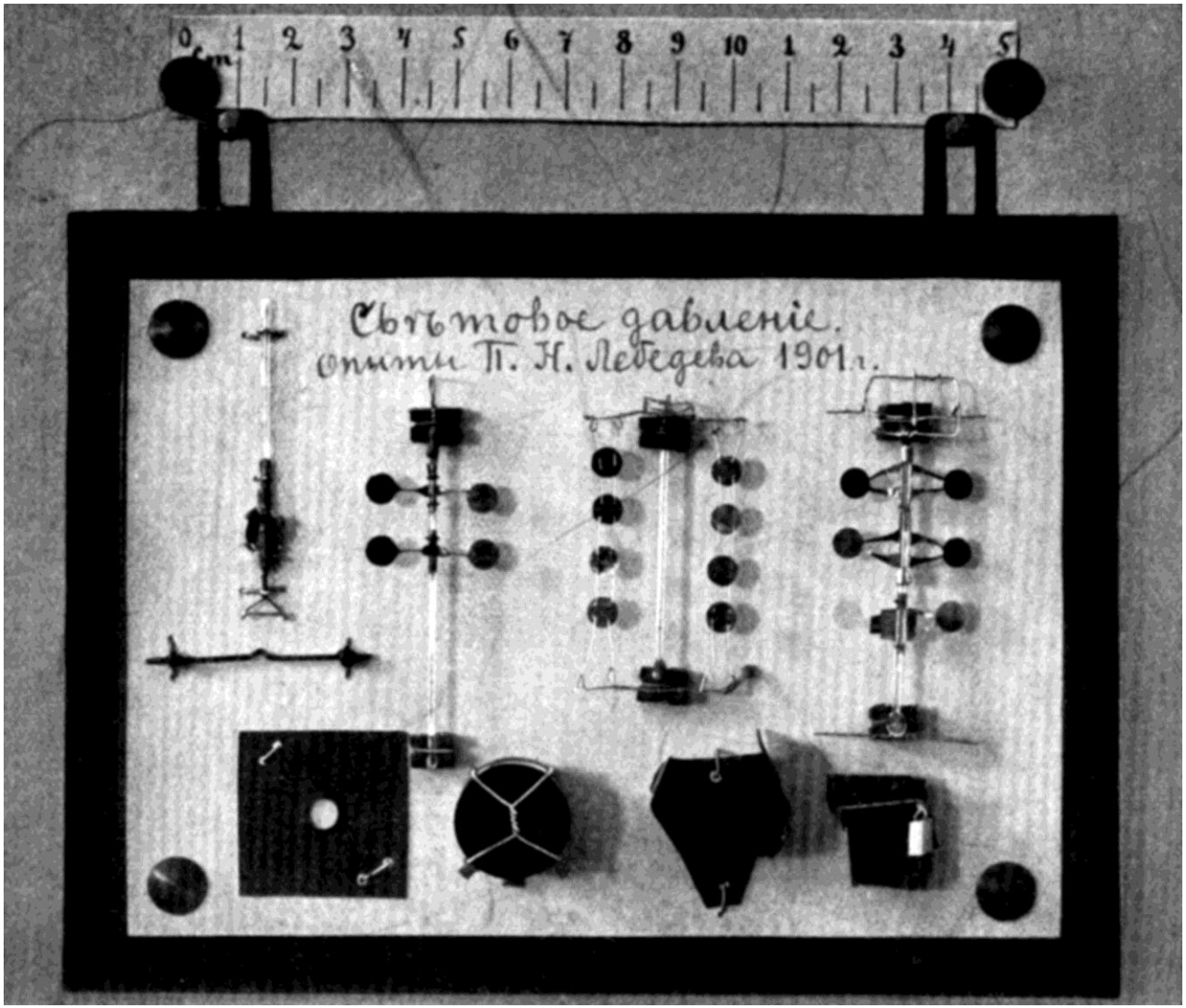
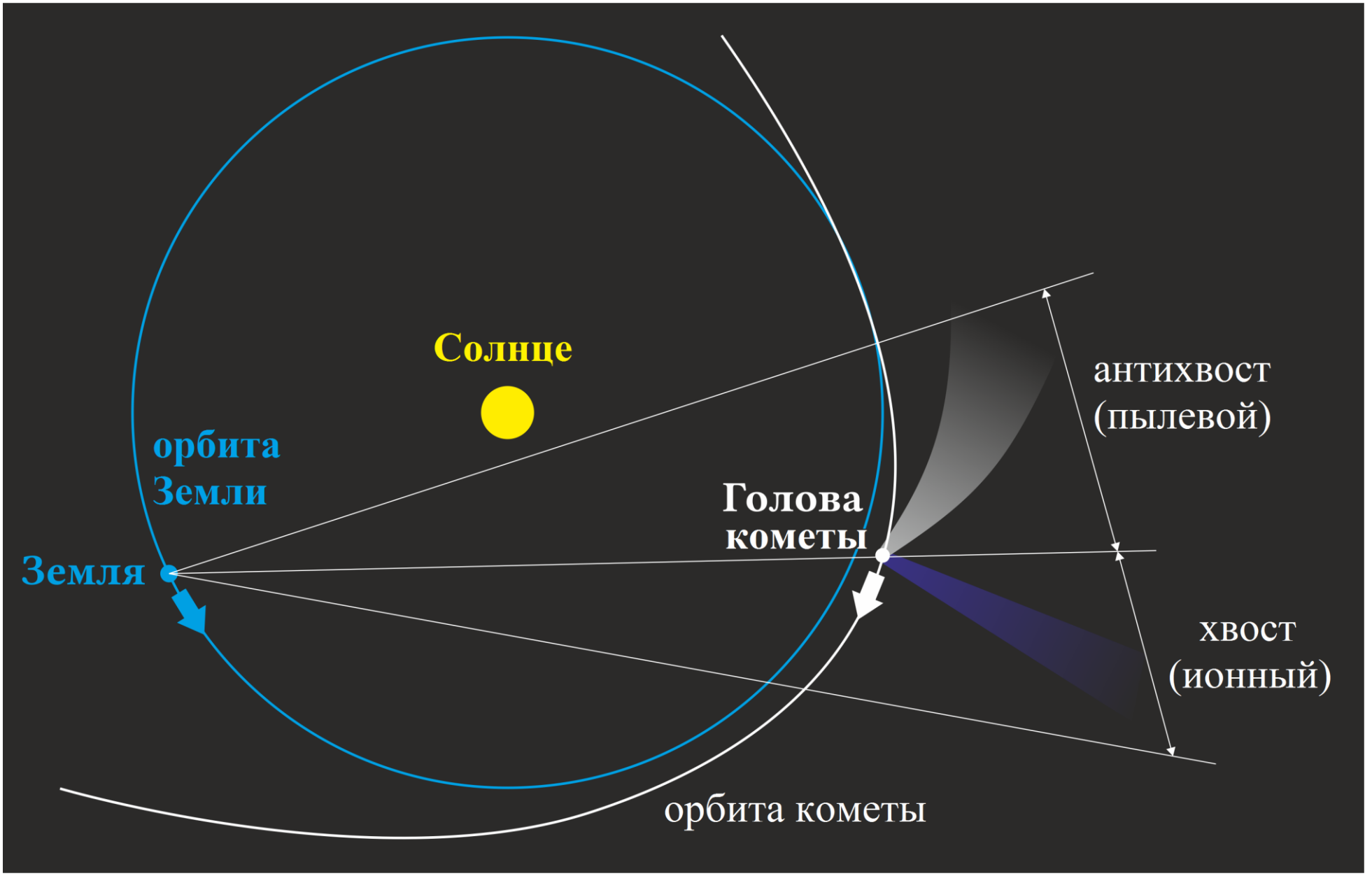


Схема образования хвостов кометы



Фотографии кометных хвостов

Комета Хейла-Боппа (март 1997 г.)

Голубой **ионный хвост** состоит из ионизованных молекул различных газов, среди которых особенно выделяются молекулы окиси углерода, которые, воссоединяясь с электронами, испускают голубое сияние. Ионный хвост возникает в результате взаимодействия частиц солнечного ветра с газом головы кометы и направлен **в точности от Солнца**.

Белый **пылевой хвост** состоит из мелких пылинок кометного ядра, отталкиваемых давлением солнечного света. Этот хвост направлен **почти в сторону, противоположную Солнцу**.