

# Материалы к Главе VI

## Излучение атома

### 1.1. Классическая осцилляторная модель атома

Рассмотрим классическую осцилляторную модель атома, разработанную нидерландским физиком-теоретиком Хендриком Антоном Лорентцем (1880–1902 гг.). Для простоты предположим, что в атоме есть всего один оптический электрон. По определению электрического дипольного момента

$$p(t) = qx(t),$$

где  $q$  – заряд электрона,  $x(t)$  – смещение электрона относительно ядра. Учтем, что масса ядра в десятки тысяч раз больше массы электрона ( $m_p / m_e \cong 1836$ ).

Рассмотрим электрон в атоме, как **затухающий гармонический осциллятор (атомный осциллятор)**, колебания которого описываются классическим уравнением движения:

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx,$$

где  $m$  – масса электрона,  $-\gamma\dot{x}$  – сила, описывающая силу трения, и введенная для учета излучения света,  $-kx$  – квазиупругая сила, стремящаяся вернуть электрон в положение равновесия. Запишем уравнение движения электрона:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $\delta = \frac{\gamma}{2m}$  – **коэффициент радиационного затухания**,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – **собственная частота колебаний** электрона в атоме без затухания.

Решая уравнение движения электрона при  $\delta < \omega_0$  (обычно  $\delta \sim 10^8 \text{ с}^{-1} \ll \omega_0 \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ), получим **закон его движения**:

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Здесь  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  и  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$  – (условные) **частота и период затухающего колебания**.

Рассмотрим энергию атомного осциллятора, усредненную за период колебаний  $T$ . Пусть  $\delta \ll \omega$ , тогда:

$$\langle x^2(t) \rangle_T = \langle x_0^2 e^{-2\delta t} \cos^2(\omega t + \varphi_0) \rangle_T \cong \frac{1}{2} x_0^2 e^{-2\delta t},$$

$$\dot{x}(t) = x_0 e^{-\delta t} \left( -\delta \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega \sin(\omega t + \varphi_0) \right),$$

$$\dot{x}^2(t) = x_0^2 e^{-2\delta t} \cdot$$

$$\cdot \left( \delta^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + 2\delta\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \sin(\omega t + \varphi_0) + \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \right),$$

$$\langle \dot{x}^2(t) \rangle_T \cong \frac{1}{2} x_0^2 e^{-2\delta t} (\delta^2 + \omega^2) = \frac{1}{2} x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t}.$$

**Кинетическая энергия атомного осциллятора:**

$$\langle W_k \rangle_T = \left\langle \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right\rangle_T = \frac{1}{4} m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t} = \frac{1}{4} k x_0^2 e^{-2\delta t},$$

где учтено, что  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

**Потенциальная энергия атомного осциллятора:**

$$\langle W_n \rangle_T = \left\langle \frac{1}{2} k x^2 \right\rangle_T = \frac{1}{4} k x_0^2 e^{-2\delta t}.$$

**Полная энергия атомного осциллятора –**

$$\langle W \rangle_T = \langle W_k \rangle_T + \langle W_n \rangle_T = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\delta t} = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t} = W_0 e^{-2\delta t},$$

то есть, энергия осциллятора меняется со временем по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания  $2\delta$ .

**Средняя мощность потерь атомного осциллятора:**

$$\langle P \rangle_T = \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle_T = \frac{d\langle W \rangle_T}{dt} = -2\delta W_0 e^{-2\delta t} = -\delta m x_0^2 \omega_0^2 e^{-2\delta t}.$$

С другой стороны, полная мощность рассеяния (излучения) одним электроном по всем направлениям (с учетом множителя  $\epsilon_0 c$ ) равна (см. п. 4.2 в Главе V):

$$\begin{aligned} J &= \oint_{\Sigma} I(r, \vartheta) d\sigma = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \epsilon_0 c \frac{\omega^4}{(4\pi\epsilon_0 c^2 r)^2} \overline{p^2(t)} \sin^2 \vartheta r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta = \\ &= \epsilon_0 c \frac{\omega^4}{(4\pi\epsilon_0 c^2)^2} \overline{p^2(t)} \frac{8}{3} \pi = \frac{\omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \overline{p^2(t)} \cong \frac{\omega_0^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cdot \frac{1}{2} q^2 x_0^2 e^{-2\delta t}. \end{aligned}$$

Приравнивая эти соотношения, получим выражение для коэффициента радиационного затухания атомного осциллятора:

$$\delta = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2\omega_0^2}{mc^3}.$$

Введем в рассмотрение **время радиационного затухания** (или **время излучения**) атомного осциллятора  $\tau \equiv \frac{1}{\delta}$  – время, через которое

амплитуда колебаний осциллятора уменьшается в  $e \cong 2.72$  раз:

$$\tau \equiv \frac{1}{\delta} = \frac{12\pi\epsilon_0 mc^3}{q^2\omega_0^2}.$$

При этом время уменьшения энергии осциллятора в те же  $e \cong 2.72$  раз (**время жизни атома в возбужденном состоянии**) равно:

$$\Delta t = \frac{\tau}{2} = \frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{q^2\omega_0^2}.$$

## 1.2. Естественная форма и ширина линии излучения

В соответствии с законом движения осциллятора его электрический дипольный момент меняется со временем по закону:

$$\mathbf{p}(t) = q\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

В то же время напряженность электрического поля излучаемой им электромагнитной волны определяется второй производной дипольного момента по времени (см. п. 4.2 в Главе V):

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[ \mathbf{n} \left[ \mathbf{n} \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right].$$

Учитывая, что  $\delta \sim 10^8 \text{ с}^{-1} \ll \omega_0 \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ , получим:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) \cong -\omega_0^2 \mathbf{p}_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$\mathbf{E}(t) \cong \mathbf{E}_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

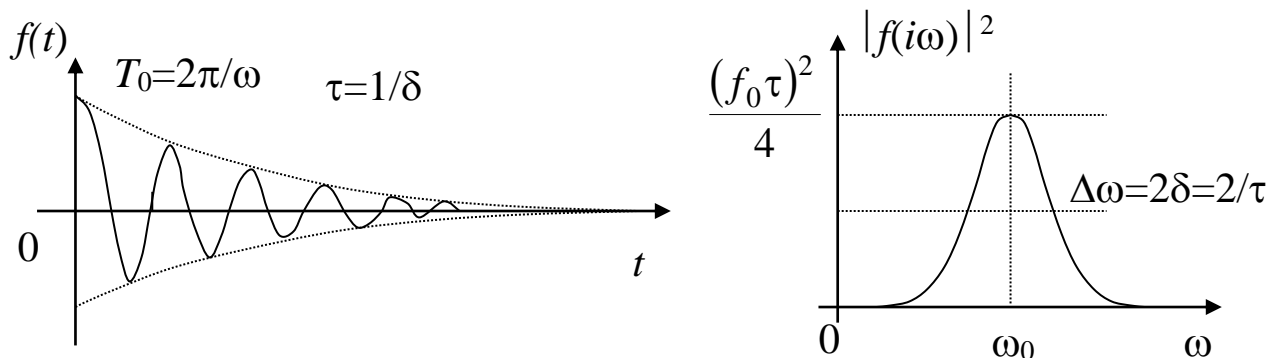
Или для напряженности поля в проекции на локальную ось координат:

$$E(t) \cong E_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Как нами было показано ранее (см. п. 4.3 в Главе II), в случае слабозатухающих колебаний –  $f(t) = f_0 e^{-\delta t} \cdot \cos \omega_0 t$ ,  $\omega_0 \gg \delta$ , спектральная плотность равна:

$$|f(i\omega)|^2 = \left(\frac{f_0}{2\delta}\right)^2 L\left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta}\right) = \left(\frac{f_0}{2\delta}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta}\right)^2}.$$

Здесь  $L(x) \equiv \frac{1}{1 + x^2}$  – функция Лоренца (см. рис.).



Как видим, ширина функции Лоренца на половине высоты равна:

$$\Delta\omega = 2\delta = \frac{2}{\tau} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2 \omega_0^2}{mc^3}.$$

и спектральная плотность для напряженности электрического поля излучения (частотный спектр) запишется в виде:

$$|E(i\omega)|^2 = \left(\frac{E_0}{\Delta\omega}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega/2}\right)^2}.$$

**Лоренцева форма линии** образуется при "естественных" условиях излучения, когда единственным фактором, влияющим на излучение осциллятора, является радиационное затухание. Поэтому эта форма называется **естественной формой линии излучения**, а ширина линии излучения  $\Delta\omega$  – **естественной шириной линии излучения**.

Заметим, что в случае поглощения света электроном в рамках той же модели линия поглощения имеет лоренцеву форму с той же шириной, что и линия излучения.

**Оценка** времени радиационного затухания атомного осциллятора  $\tau$ , время жизни атома в возбужденном состоянии  $\Delta t$  и естественной ширины линии излучения  $\Delta\omega$ .

Пусть  $\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6}$  м, при этом  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 9 \cdot 10^9$  (СИ),  $m = m_e \cong 9.1 \cdot 10^{-31}$  кг – масса электрона,  $q \cong -1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона, тогда:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{12\pi\epsilon_0 mc^3}{q^2 \omega_0^2} = \frac{12\pi\epsilon_0 mc^3 T^2}{q^2 4\pi^2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{3mc\lambda^2}{q^2 4\pi^2} \cong \\ &\cong \frac{3 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 0.25 \cdot 10^{-12}}{9 \cdot 10^9 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 4 \cdot 3.14159^2} \cong 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ с}. \\ \Delta t &\cong 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ с}, \quad \Delta\omega \cong 0,9 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

## Излучение ансамбля статистически независимых осцилляторов. Уширение спектральной линии

### А. Ударное уширение

В газе при комнатной температуре и нормальном давлении среднее время между столкновениями атомов  $\tau_0 \sim 10^{-11}$  с. Оценка времени затухания естественного излучения атомного осциллятора дает  $\tau \sim 10^{-8}$  с. Для выбранных условий за время излучения атом переживает  $\sim 10^3$  соударений. После каждого столкновения фаза испускаемой волны меняется случайным образом. Весь процесс излучения разбивается на отдельные акты излучения со средней продолжительностью  $\tau_0$ . Так как ширина линии излучения обратно пропорциональна времени излучения, то из-за соударений ширина линии в рассматриваемых условиях будет примерно в  $10^3$  раз больше естественной ширины линии излучения.

Пусть вероятность столкновения в единицу времени  $\alpha$  не зависит от времени. Если  $P(t)$  – вероятность отсутствия столкновения до момента времени  $t$ , при этом в начальный момент времени столкновения не было –  $P(0) = 1$ , то:

$$P(t + dt) = P(t)(1 - \alpha dt), \quad dP = -P(t)\alpha dt$$

Решая это дифференциальное уравнение, для  $P(t)$  получим:

$$P(t) = e^{-\alpha t}.$$

В то же время вероятность того, что не было столкновения до момента времени  $t$  и в следующий интервал времени  $dt$  произойдет столкновение, т.е. вероятность столкновения в интервале времени от  $t$  до  $t + dt$ , равна:

$$p(t)dt = P(t)\alpha dt,$$

где  $p(t)$  – **плотность вероятности столкновения в момент времени  $t$** . Следовательно, эта плотность вероятности равна:

$$p(t) = \alpha e^{-\alpha t}.$$

**Среднее время между столкновениями  $\tau_0$  будет:**

$$\tau_0 \equiv \bar{t} = \int_0^{\infty} t \alpha e^{-\alpha t} dt = \alpha \int_0^{\infty} t e^{-\alpha t} dt = \alpha \left( t \left( -\frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left( -\frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} dt \right) = \frac{1}{\alpha}.$$

Вероятность столкновения в интервале времени от  $\xi$  до  $\xi + d\xi$  равна:

$$p(\xi)d\xi = (1/\tau_0) \cdot e^{-\frac{\xi}{\tau_0}} d\xi.$$

Поскольку время естественного излучения гораздо больше времени между столкновениями —  $\tau \gg \tau_0$ , то за время между двумя столкновениями амплитуда напряженности электрического поля испускаемой волны практически не меняется:

$$E(t) = E_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}, \quad t_0 < t < t_0 + \xi,$$

где  $\varphi_0$  — случайная начальная фаза.

Комплексную спектральную амплитуду поля излучения найдем из соотношения:

$$\begin{aligned} E(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{t_0}^{t_0 + \xi} E_0 e^{i(\omega_0 t - \omega t + \varphi_0)} dt = \\ &= E_0 e^{i((\omega_0 - \omega)t_0 + \varphi_0)} e^{i(\omega_0 - \omega)\xi/2} \frac{2 \sin((\omega_0 - \omega)\xi/2)}{i(\omega_0 - \omega)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что спектральная плотность равна:

$$|E(i\omega)|^2 = 4E_0^2 \cdot \frac{\sin^2 \left[ (\omega_0 - \omega) \frac{\xi}{2} \right]}{(\omega_0 - \omega)^2}.$$

Для определения спектрального состава излучения от всех атомов получившееся соотношение усредняем по времени излучения  $\xi^1$ :

$$\begin{aligned} \underline{w(\omega)} &\sim \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\infty} |E(i\omega)|^2 e^{-\frac{\xi}{\tau_0}} d\xi = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \left[ (\omega_0 - \omega) \frac{\xi}{2} \right]}{(\omega_0 - \omega)^2} e^{-\frac{\xi}{\tau_0}} d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (1/\tau_0)^2}. \end{aligned}$$

Как видим, ударное уширение характеризуется **лоренцевой формой линии** с шириной:

$$\Delta\omega_L = 2/\tau_0.$$

<sup>1</sup> Здесь использован табличный неопределенный интеграл:

$$\int e^{ax} \sin^2 x dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4} (a \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 2/a).$$

Среднее время между столкновениями  $\tau_0$  и ударное уширение  $\Delta\omega_L$  можно оценить, если воспользоваться известными из раздела «Молекулярная физика» курса Общей физики выражениями для:

$$\text{средней длины свободного пробега} - \langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \text{ и}$$

$$\text{среднего модуля скорости молекул} - \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}},$$

где  $d$  – газокинетический диаметр молекул,  $n$  – концентрация молекул в газе,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура,  $m$  – масса молекулы.

Среднее время между столкновениями  $\tau_0$  с учетом  $p = nk_B T$ , где  $p$  – давление в газе, будет равно:

$$\tau_0 = \frac{\langle l \rangle}{\langle v \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle} = \frac{\sqrt{mk_B T}}{4\sqrt{\pi} d^2 p},$$

а ударное уширение  $\Delta\omega_L$  –

$$\Delta\omega_L = \frac{2}{\tau_0} = \frac{8\sqrt{\pi} d^2 p}{\sqrt{mk_B T}}.$$

Заметим, что при постоянном давлении  $p$  –  $\Delta\omega_L \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$ , а при постоянном объеме  $V$ , с учетом уравнения состояния газов –  $\Delta\omega_L \sim \sqrt{T}$ .

## Б. Доплеровское уширение

Пусть излучающий осциллятор участвует в тепловом движении. Тогда в соответствии с **эффектом Доплера** излучаемая им частота не равна частоте излучения покоящегося атома.

Запишем законы сохранения энергии и импульса для отдельного атома в возбужденном (2) и основном (1) состояниях:

$$E_2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = E_1 + \frac{1}{2} m v_1^2 + \hbar\omega,$$

$$m v_2 = m v_1 + \hbar k.$$

Здесь  $E_2$  – энергия возбужденного состояния атома;  $E_1$  – энергия основного состояния – нижнего уровня, на который электрон совершает переход при излучении;  $m$  – масса атома;  $v_2$  и  $v_1$  – скорости атома



до и после акта излучения;  $h\omega$  и  $\hbar k$  – энергия и импульс испущенного фотона. Для покоящегося атома  $\hbar\omega_0 = E_2 - E_1$ .

Используя законы сохранения, и преобразуя соответствующие им уравнения:

$$\begin{aligned} \hbar(\omega_0 - \omega) &= \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_2^2, \\ m^2\upsilon_1^2 &= m^2\upsilon_2^2 - 2m\hbar\upsilon_2 \cdot \mathbf{k} + \hbar^2 k^2, \end{aligned}$$

можно записать:

$$\hbar(\omega_0 - \omega) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \hbar\upsilon_2 \cdot \mathbf{k}.$$

Направляя ось Z декартовой системы координат вдоль волнового вектора излученного фотона, и учитывая, что  $k = \omega/c$ , получаем:

$$\omega_0 - \omega = \frac{\hbar\omega^2}{2mc^2} - \frac{\omega\upsilon_{2z}}{c}.$$

Для комнатных температур и типичных масс атомов можно использовать следующее приближение:

$$\frac{\hbar\omega}{2mc^2} (10^{-9}) \ll \frac{\upsilon_{2z}}{c} (10^{-5}),$$

откуда следует, что частота излучения осциллятора  $\omega$  и проекция его скорости  $\upsilon_{2z}$  линейно связаны (продольный эффект Доплера):

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{\upsilon_{2z}}{c}} \approx \omega_0 \left( 1 + \frac{\upsilon_{2z}}{c} \right).$$

Доля атомов, проекции скорости которых заключены в интервале  $(\upsilon_{2z}, \upsilon_{2z} + d\upsilon_{2z})$ , в соответствии с распределением Максвелла вероятность пропорциональна

$$w(\upsilon_{2z})d\upsilon_{2z} \sim e^{-\frac{m\upsilon_z^2}{2k_B T}} d\upsilon_{2z},$$

где  $k_B$  – постоянная Больцмана.

Учитывая, что проекция скорости  $v_{2z}$  и частота  $\omega$  линейно взаимосвязаны –

$$\omega \approx \omega_0 \left( 1 + \frac{v_{2z}}{c} \right), \quad d\omega = \frac{\omega_0}{c} dv_{2z},$$

для вероятности того, что частоты излучения заключены в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ , можно записать:

$$w(\omega)d\omega = w(v_{2z})dv_{2z}.$$

Следовательно, получаем выражение для распределения энергии по частотам:

$$w(\omega)d\omega \sim e^{-\frac{mc^2(\omega-\omega_0)^2}{2k_B T \omega_0^2}} d\omega = e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega_G/2}\right)^2 \ln 2} d\omega.$$

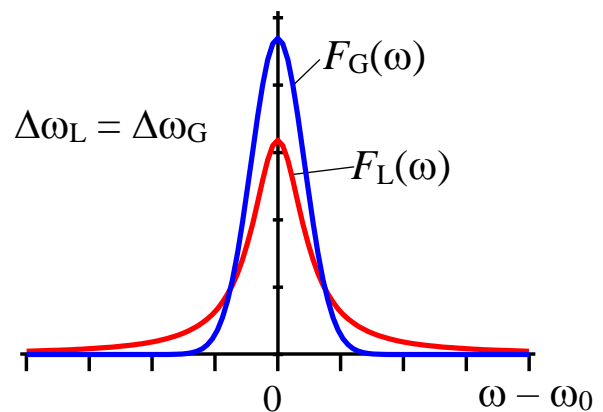
Как видим, ударное уширение характеризуется **гауссовой формой линии** с шириной на половине высоты распределения:

$$\Delta\omega_G = \omega_0 \sqrt{\frac{8k_B T \ln 2}{mc^2}} \sim \sqrt{T}.$$

**Оценим** доплеровскую ширину спектральной линии излучения гелий-неонового лазера. Полагая  $T = 300$  К,  $\lambda = 6328$  Å,  $m(\text{Ne}) = 3 \cdot 10^{-26}$  кг,  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/град,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, получим:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_G &= \omega_0 \sqrt{\frac{8k_B T \ln 2}{mc^2}} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{8k_B T \ln 2}{m}} \cong \\ &\cong \frac{6.28}{6.328 \cdot 10^{-7}} \sqrt{\frac{8 \cdot 1.36 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 0.693}{3 \cdot 10^{-26}}} \cong 8.6 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}, \end{aligned}$$

На рисунке представлены для сравнения лоренцева и гауссова линии, имеющие одинаковую ширину  $\Delta\omega_L = \Delta\omega_G$ . При этом использована нормировка площади под каждой из этих кривых на единицу.



## Понятие об однородном и неоднородном уширении

**1. Однородный ансамбль осцилляторов** – ансамбль, в котором осцилляторы имеют одинаковые собственные частоты колебаний.

**Однородно уширенная спектральная линия** – спектральная линия однородного ансамбля осцилляторов, равная суперпозиции спектральных линий отдельных осцилляторов.

**Однородная ширина  $\Delta\omega$**  характеризует спектр колебаний ансамбля осцилляторов с одинаковыми собственными частотами.

Причины – одинаковость квантовых состояний атомов или молекул, однородность изотопного или химического состава среды.

Этот тип уширения присущ спектрам отдельных осцилляторов.

Формы спектральных линий отдельных осцилляторов и всего однородного ансамбля осцилляторов совпадают.

Примеры – естественное (радиационное) и ударное уширения.

**2. Неоднородный ансамбль осцилляторов** – ансамбль, в котором осцилляторы имеют разные собственные частоты колебаний.

**Неоднородно уширенная спектральная линия** – спектральная линия неоднородного ансамбля осцилляторов, равная суперпозиции спектральных линий отдельных осцилляторов.

**Неоднородная ширина  $\Delta\omega^*$**  характеризует спектр колебаний ансамбля осцилляторов с разными собственными частотами (ширина полосы резонансных частот).

Причины – различие квантовых состояний атомов или молекул, неоднородность изотопного или химического состава среды, хаотическое тепловое движение частиц и т.п.

Этот тип уширения присущ только спектру ансамбля осцилляторов, но не спектрам отдельных осцилляторов.

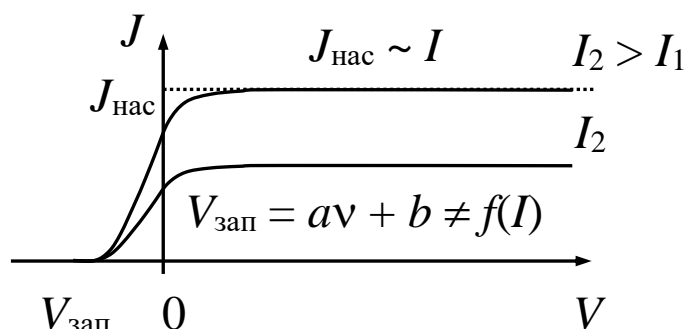
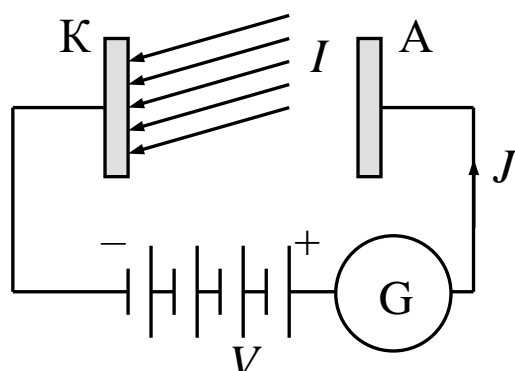
Формы спектральных линий отдельных осцилляторов и всего неоднородного ансамбля отличаются. При этом для неоднородного ансамбля осцилляторов спектральная линия оказывается шире спектральных линий отдельных осцилляторов.

Примеры – доплеровское, изотопическое, вращательное (в молекулярных газах) и т.п. уширения.

## Квантовые свойства света

### А. Фотоэлектрический эффект (Генрих Рудольф Герц – 1887 г.)

(Внешний) фотоэффект – явление испускания электронов веществом под действием света – **фотоэлектронная эмиссия**.



### Законы фотоэффекта (1888-1915 гг.)

1. Существует фототок насыщения, сила которого  $J_{\text{нас}}$  прямо пропорциональна интенсивности падающего света  $I$  (Александр Григорьевич Столетов, 1888 г.)

2. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов  $W_{\text{max}} = eV_{\text{зап}}$  не зависит от интенсивности  $I$  падающего света, а линейно зависит от частоты  $\nu$  падающего света (Филипп Эдуард Антон Ленард, 1902 г.).

3. Существует минимальная частота падающего света  $\nu_{\text{min}}$  – **красная граница фотоэффекта** ( $h\nu_{\text{min}} = A$ ), при которой еще наблюдается фотоэффект.

**Внутренний фотоэффект** – оптическое возбуждение электронов, остающихся внутри освещенного тела. В диэлектриках и полупроводниках меняется концентрация носителей заряда или их подвижность.

Для объяснения законов фотоэффекта пришлось предположить, что свет состоит из отдельных корпускул – **квантов света, фотонов** (гипотеза Альберта Эйнштейна, 1905 г.). Формула Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A + W_{\text{max}},$$

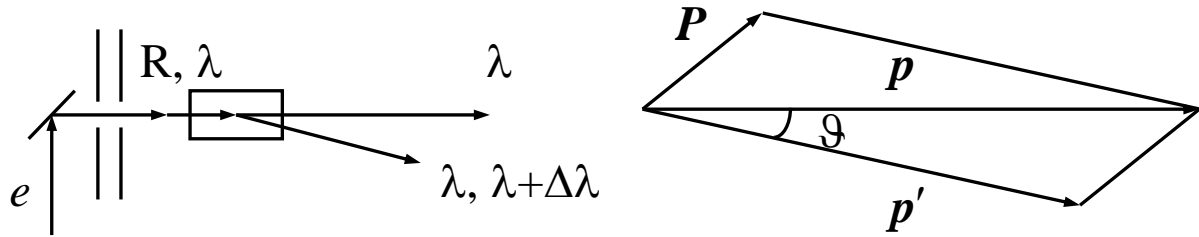
где  $h\nu$  – энергия кванта света,  $A$  – **работа выхода** – энергия, необходимая для удаления электрона из металла,  $h \cong 6.63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – по-

стоянная Планка,  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – приведенная постоянная

Планка или **постоянная Дирака**.

## Б. Эффект Комптона (Артур Холли Комpton – 1922 г.)

**Эффект Комптона** – явление увеличения длины электромагнитной волны (рентгеновских лучей) при ее рассеянии на свободном электроне (слабо связанном электроне легких атомов).



Законы сохранения энергии и импульса для системы "электрон + фотон":

$$E_{\nu} + W = E'_{\nu} + W', \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{P}.$$

Для фотона –  $E_{\nu} = h\nu$ ,  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = \frac{h\nu}{c}\mathbf{n}$ , для релятивистского электрона –

$$W = mc^2, \quad W' = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \gamma mc^2, \quad \mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \gamma m\mathbf{v}.$$

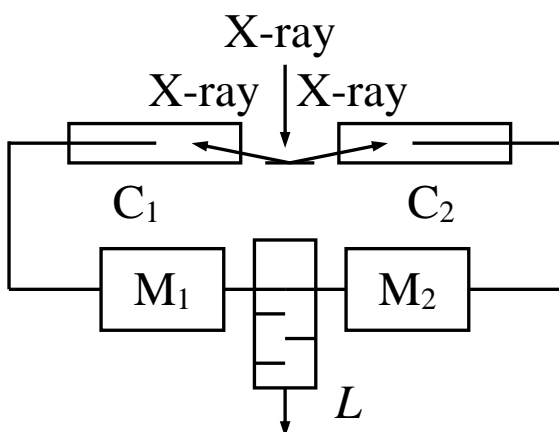
В результате –  $\Delta\lambda = \lambda_K(1 - \cos\vartheta)$ ,

где  $\lambda_K \equiv \frac{h}{mc} \cong 0.024 \text{ \AA}$  – **комптоновская длина волны электрона**.

Изменение длины волны  $\Delta\lambda$  не зависит от длины волны  $\lambda$  рассеиваемой волны и от материала рассеивающего тела, но зависит от направления рассеяния (как в эксперименте!).

Свободный покоящийся электрон не может поглотить фотон.

Эффект Комптона – прямое доказательство существования кванта света – фотона и обладания им импульсом.



**Опыт Вальтера Боте** (после разработки им в 1924 г. метода совпадений с характерным временем регистрации  $<10^{-3}$  с), показал, что вторичные рентгеновские, испускаемые металлической фольгой, кванты летят беспорядочно то в одну, то в другую сторону ( $C_{1,2}$  – газоразрядные счетчики,  $M_{1,2}$  – механизмы, делавшие отметки на ленте L).

## Вывод:

Свет испускается атомом, распространяется в пространстве (со скоростью света) и вступает во взаимодействие с веществом (поглощается и рассеивается) как целое, в виде локализованной порции света, – кванта света, фотона.

**Квант света или фотон** – это элементарная (наименьшая) неделимая порция света, обладающая энергией и импульсом:

$$E_{\nu} = h\nu = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \frac{E_{\nu}}{c} \mathbf{n} = \hbar \mathbf{k} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$

### Численные оценки.

1. Энергия кванта света  $E_{\nu}$  для:

а) световых волн ( $1\text{эВ} = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Дж,  $E_T = kT \cong 0.025$  эВ):

$$E_{\nu} = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \cong 6.63 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{0.5 \cdot 10^{-6}} \cong 4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \cong 2.5 \text{ эВ};$$

б) рентгеновского излучения:

$$E_{\nu} = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \cong 6.63 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{10^{-10}} \cong 2 \cdot 10^{-15} \text{ Дж} \cong 1.25 \cdot 10^4 \text{ эВ}.$$

2. Число квантов  $n$ , регистрируемых за 1 с глазом ( $r = 2$  мм) на расстоянии  $R = 1$  м в случае лампы накаливания с  $P = 60$  Вт:

$N = \frac{P}{h\nu}$  – число фотонов, испускаемых по всем направлениям, в 1 с,

$$n = \frac{N}{4\pi} \Omega = \frac{P\pi r^2}{h\nu 4\pi R^2} = \frac{Pr^2 \lambda}{4hcR^2} \cong \frac{60 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1} \cong 1.5 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}.$$

С увеличением частоты и уменьшением интенсивности электромагнитных волн усиливается проявление их корпускулярных свойств при излучении и взаимодействии с веществом.

**Обобщение** взаимосвязи волновых ( $\nu$ ,  $\lambda$ ) и корпускулярных ( $E$ ,  $p$ ) характеристик на частицы с отличной от нуля массой покоя.

**Гипотеза Луи де Бройля** (1924 г.) – каждой частице с массой  $m$ , движущейся со скоростью  $v$ , можно сопоставить волну длиной:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Свойство дуализма присуще не только свету, а материи вообще.

Экспериментальное подтверждение – обнаружение явления **дифракции электронов** американскими физиками К.Д. Дэвисоном и Л.Х. Джермером и английским физиком Д.П. Томсоном в 1927 г.

# Квантовые свойства атомов. Постулаты Бора

(датский физик Нильс Хендрик Давид Бор – 1913 г.).

Гипотеза Макса Планка о квантовании энергии осциллятора + модель атома Резерфорда  $\Rightarrow$  теория водородоподобного атома Бора.

**1. Существуют стационарные состояния атомов**, в которых они не излучают и не поглощают свет. В этих состояниях атомы обладают энергиями  $W_n$ , образующими дискретный ряд значений – уровни энергии.

**2. При переходах между уровнями энергии  $W_n$  и  $W_m$  испускается или поглощается атомом квант света – фотон с энергией**

$$h\nu_{nm} = \hbar\omega_{nm} = W_n - W_m.$$

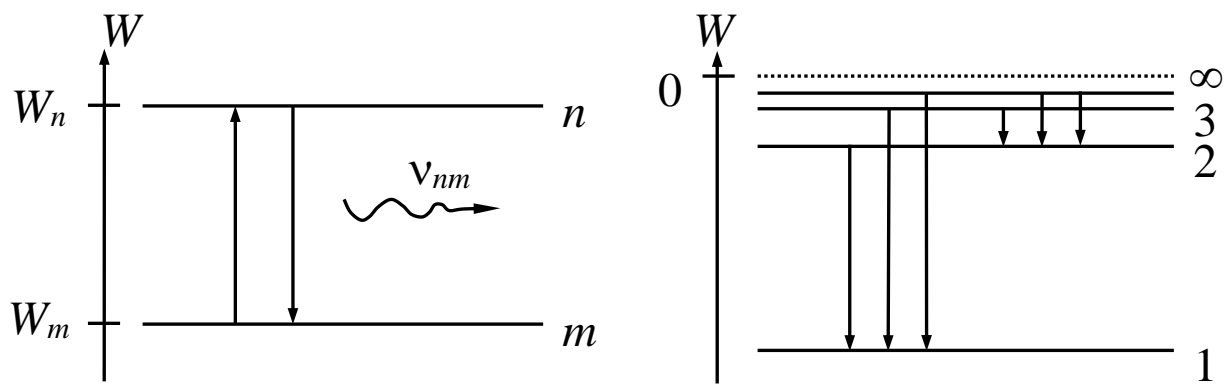


Схема энергетических уровней атома

Для простейших атомов –  $W_n = -\frac{(Z-a)^2}{n^2} Rhc$ ,

$R = 109678 \text{ см}^{-1}$  – **постоянная Ридберга**,

$Z$  – заряд ядра,  $a$  – константа экранирования,

$n = 1, 2, 3, \dots$  – **главное квантовое число**.

Для атома водорода:  $Z = 1, a = 0$  –  $W_n = -\frac{Rhc}{n^2}$ ,  $\hbar\omega_{nm} = Rhc \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ .

**Серия Лаймана** –  $m = 1$ ,  $\hbar\omega_{n1} = W_n - W_1 = Rhc \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$ .

**Серия Бальмера** –  $m = 2$ ,  $\hbar\omega_{n2} = W_n - W_2 = Rhc \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ .

**Серия Пашена** –  $m = 3$ ,  $\hbar\omega_{n3} = W_n - W_3 = Rhc \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ .

## Типы радиационных переходов.

### Коэффициенты Эйнштейна

Вероятность спонтанного перехода в единицу времени для состояния  $n$ :  $\alpha_n$  ( $[\alpha_n] = 1/c$ ). Не зависит от времени нахождения в возбужденном состоянии:  $\alpha_n = \text{const}(t)$ .

Вероятность нахождения атома в возбужденном состоянии  $n$  в момент времени  $t$ :  $p_n(t) = e^{-\alpha_n t}$  (при  $p_n(0) = 1$ ).

Средняя длительность (время жизни) возбужденного состояния  $n$ :

$$\tau_n = \int_0^{\infty} t \alpha_n p_n(t) dt = \int_0^{\infty} t \alpha_n e^{-\alpha_n t} dt = \frac{1}{\alpha_n}.$$

Число возбужденных атомов в единице объема  $N_n$ :

$$N_n(t) = N_n(0) e^{-\alpha_n t} = N_n(0) e^{-\frac{t}{\tau_n}}.$$

Интенсивность спонтанного излучения:

$$I_n(t) \sim -\frac{dN_n}{dt} = \alpha_n N_n(0) e^{-\alpha_n t}, \quad I_n(t) = I_n(0) e^{-\alpha_n t}.$$

Средняя мощность (поток энергии)

- спонтанного излучения –  $P_{nm}^{\text{СИ}} = A_{nm} N_n \hbar \omega_{nm}$ ,
- поглощения –  $P_{mn}^{\text{П}} = B_{mn} N_m \hbar \omega_{nm} u(\omega_{nm})$ ,
- вынужденного излучения –  $P_{nm}^{\text{ВИ}} = B_{nm} N_n \hbar \omega_{nm} u(\omega_{nm})$ .

Термодинамическое равновесие –  $P_{mn}^{\text{П}} = P_{nm}^{\text{СИ}} + P_{nm}^{\text{ВИ}}$ .

Распределение Больцмана –  $\frac{N_m}{N_n} = \frac{g_m}{g_n} e^{-\frac{W_m - W_n}{k_B T}} = \frac{g_m}{g_n} e^{-\frac{\hbar \omega_{nm}}{k_B T}}$ .

Соотношения для коэффициентов Эйнштейна для любых переходов и квантовых систем:

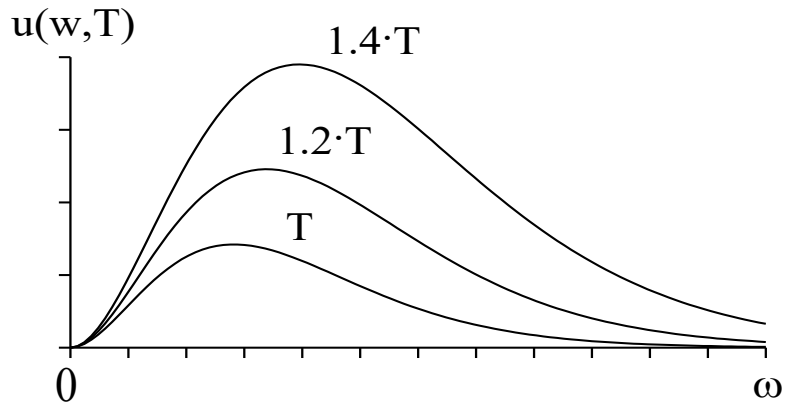
$$B_{mn} g_m = B_{nm} g_n, \quad \frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{\hbar \omega_{nm}^3}{\pi^2 c^3}.$$



## Формула Планка

**Спектральная объемная плотность энергии равновесного теплового излучения:**

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$



**Формула Рэлея (1900 г.)-Джинса (1905 г.):**

$$\text{при } k_B T \gg \hbar\omega - u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T.$$

**Формула Вина (1896 г.):**

$$\text{при } k_B T \ll \hbar\omega - u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}.$$

**Закон Стефана (1879 г.)-Больцмана (1884 г.):**

**Объемная плотность энергии равновесного теплового излучения:**

$$\begin{aligned} w(T) &= \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} d\omega = \\ &= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \cdot \left( \frac{k_B T}{\hbar} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{k_B^4 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 c^3 \hbar^3} T^4 = \sigma T^4. \end{aligned}$$

**Закон смещения Вина:**

$$\left. \frac{\partial u(\omega, T)}{\partial \omega} \right|_{\omega_{\max}} = 0 \Rightarrow 3 \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega_{\max}}{k_B T}} \right) = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k_B T} e^{-\frac{\hbar\omega_{\max}}{k_B T}} \Rightarrow$$

$$\frac{\hbar\omega_{\max}}{k_B T} = \text{const}, \quad \frac{\omega_{\max}}{T} = \text{const}$$

$$\lambda_{\max} T = \text{const}.$$

## Контуры спектральных линий

Спектральным прибором высокой разрешающей силы можно измерить **контуры спектральных линий** излучения и поглощения.

**Контуры спектральных линий** – спектральные плотности мощности спонтанного излучения  $p_{nm}^{СИ}(\omega)$ , поглощения  $p_{mn}^{П}(\omega)$  и вынужденного излучения  $p_{nm}^{ВИ}(\omega)$  единицы объема вещества при радиационных переходах  $n \leftrightarrow m$  атомов:

$$p_{nm}^{СИ}(\omega) = a_{nm}(\omega) N_n \hbar \omega,$$

$$p_{mn}^{П}(\omega) = b_{mn}(\omega) N_m \hbar \omega u(\omega),$$

$$p_{nm}^{ВИ}(\omega) = b_{nm}(\omega) N_n \hbar \omega u(\omega).$$

$a_{nm}(\omega)$ ,  $b_{mn}(\omega)$  и  $b_{nm}(\omega)$  – **спектральные плотности коэффициентов Эйнштейна** (при  $\Delta\omega / \omega \sim 10^{-7} \ll 1$  и  $u(\omega)$  – слабо меняющиеся ф-ии):

$$\int_0^{\infty} a_{nm}(\omega) d\omega = A_{nm}, \quad \int_0^{\infty} b_{mn}(\omega) d\omega = B_{mn}, \quad \int_0^{\infty} b_{nm}(\omega) d\omega = B_{nm}.$$

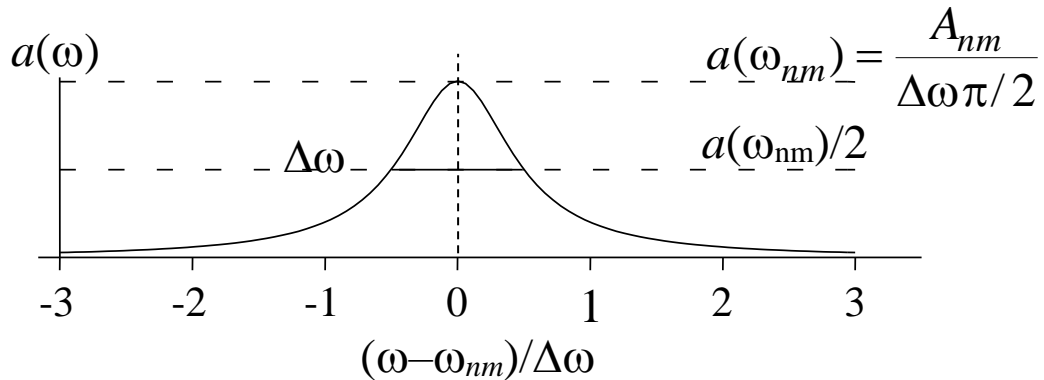
Аналогично коэффициентам Эйнштейна:

$$b_{mn}(\omega) g_m = b_{nm}(\omega) g_n, \quad \frac{a_{nm}(\omega)}{b_{nm}(\omega)} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3}.$$

При  $\Delta\omega / \omega \sim 10^{-7} \ll 1$  линии подобны:  $b_{mn}(\omega) \sim b_{nm}(\omega) \sim a_{nm}(\omega)$ .

В соответствии с экспоненциальным по времени характером распада состояния (дисперсионная формула Брейта-Вигнера):

$$a_{nm}(\omega) = A_{nm} \frac{\Delta\omega / 2\pi}{(\omega - \omega_{nm})^2 + (\Delta\omega / 2)^2}.$$



Согласно квантовой теории излучения –  $\Delta\omega = 1/\tau_n + 1/\tau_m$ .

Уширение:  $\Delta\omega_L^{уд} = \frac{8\sqrt{\pi} d^2 p}{\sqrt{m k_B T}} \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$ ,  $\Delta\omega_G^{доп} = \omega_0 \sqrt{\frac{8k_B T \ln 2}{m c^2}} \sim 10^{10 \div 11} \text{ с}^{-1}$ .

# Энергетическая структура и спектры атомов, молекул и твердых тел

**1. Атомов – линейчатая** (серии Лаймана, Бальмера, Пашена, ...).

$$W_n = -\frac{(Z - a)^2}{n^2} Rhc; \quad \hbar\omega_{nm} = W_n - W_m = Rhc \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

$n = 1, 2, 3, \dots$  – главное квантовое число,  $Z$  – заряд ядра,  $R = 109678 \text{ см}^{-1}$  – постоянная Ридберга,  $a$  – константа экранирования.

**2. Молекул – линейчато-полосатая.**

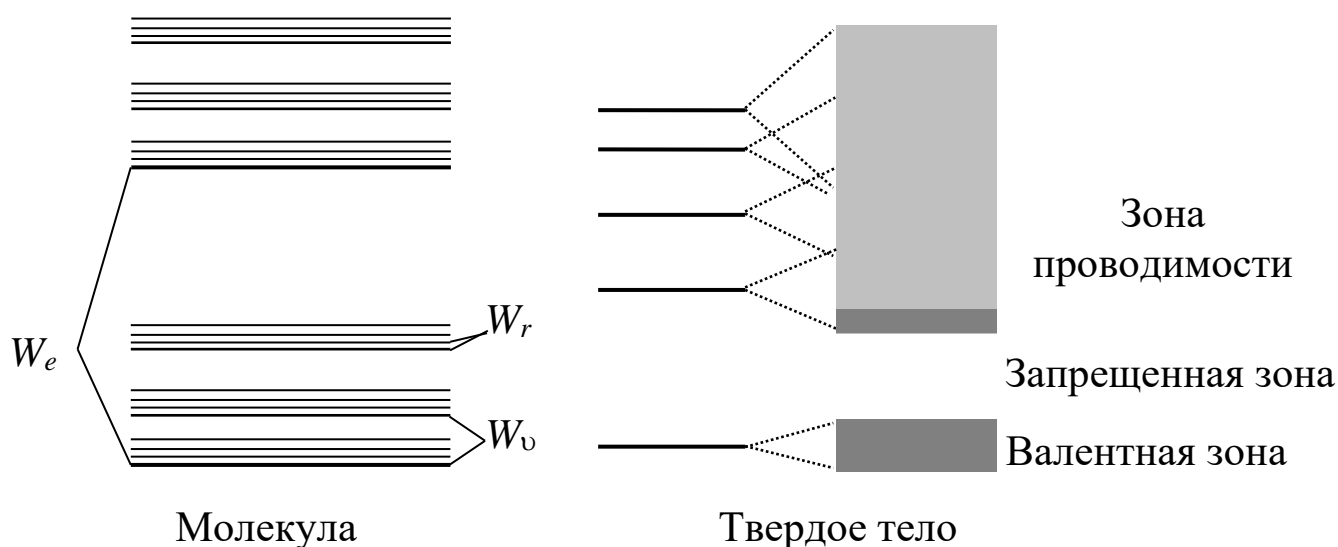
Три типа переходов – электронные, колебательные и вращательные.

Энергия колебательного движения –  $W_\nu = \hbar\omega_\nu \left( \nu + \frac{1}{2} \right), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$

$\nu = 0, 1, 2, \dots$  – колебательное квантовое число,  $\omega_\nu$  – частота колебаний.

Энергия вращательного движения –  $W_r = \frac{L_r^2}{2J} = \frac{\hbar^2 r(r+1)}{2J},$

$J$  – момент инерции,  $L_r = \hbar\sqrt{r(r+1)}$  – момент количества движения (импульса),  $r = 0, 1, 2, 3, \dots$  – вращательное квантовое число.



В первом приближении три вида движения независимы:

$$W = W_e + W_\nu + W_r,$$

$$\omega = \frac{\Delta W}{\hbar} = \frac{\Delta W_e}{\hbar} + \frac{\Delta W_\nu}{\hbar} + \frac{\Delta W_r}{\hbar} = \omega_e + \omega_\nu + \omega_r, \quad \omega_e > \omega_\nu > \omega_r.$$

$$\Delta W_e = \hbar\omega_e - \text{ВО и УФО},$$

$$\Delta W_\nu = \hbar\omega_\nu - \text{ИКО}, \quad \Delta W_r = \hbar\omega_r - \text{далекая ИКО}.$$

**3. Твердых тел – полосатая** (взаимод. атомов, плотн. уровней).

# Явление люминесценции

## Определение и виды люминесценции

**Люминесценция** – квантовый неравновесный процесс спонтанного излучения при энергетических переходах, происходящих после возбуждения вещества в газообразном (в атомах и молекулах), жидком и твердом состояниях.

Люминесценция представляет собой избыток над тепловым излучением тела и продолжается в течение времени ( $\tau$ ), значительно превышающего период ( $T = 10^{-14} - 10^{-15}$  с) световых колебаний ( $\tau \gg T$ ).

Вещество, на которое оказывается энергетическое воздействие, должно находиться в состоянии, **близком к равновесному**.

При сильном отклонении от равновесного состояния говорить о тепловом излучении или люминесценции не имеет смысла.

Излучение **некогерентно**, поскольку длительность между энергетическим воздействием и испусканием фотона больше периода световой волны.

В природе – северное сияние, свечение насекомых, минералов, гниющего дерева.

**Люминофоры** – люминесцентные вещества в любом агрегатном состоянии:

- газы; пары –  $O_2$ , S, J, Na;
- соли редких земель;
- соединения бензольного ряда;
- ароматические соединения – нафталин, атрацен;
- различные виды красителей;
- неорганические кристаллы с примесями тяжелых металлов ( $ZnS$ ,  $CuCl_2$ ) – **кристаллофоры**.

# Виды люминесценции

## Способ возбуждения



## Длительность свечения

**Флуоресценция**

$$\tau \leq \sim 10^{-8} \text{ с}$$

**Фосфоресценция**

$$\tau > \sim 10^{-8} \text{ с}$$

## Б. Механизмы и свойства

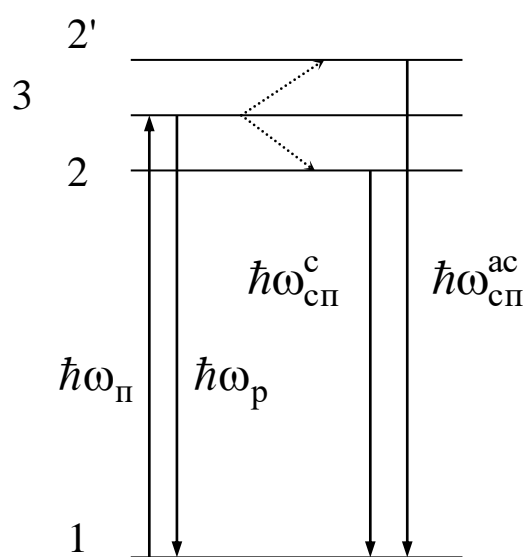
### Механизм процесса испускания

**Резонансная**

**Спонтанная**

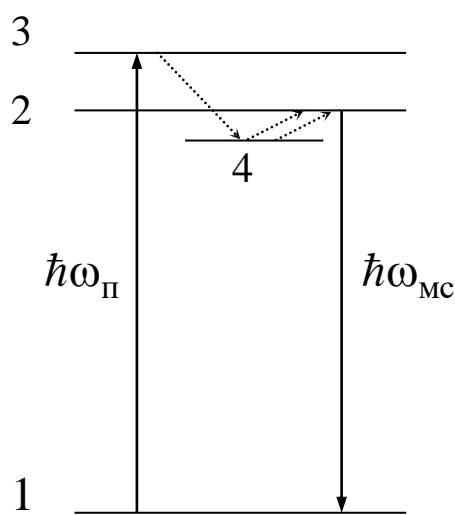
**Метастабильная**

**Рекомбинационная**



Резонансная

Спонтанная



Метастабильная  
(вынужденная)

**Рекомбинационная** люминесценция – возбуждение вещества  $\Rightarrow$  разделение разноименно заряженных частиц (ионов, электронов)  $\Rightarrow$  рекомбинация  $\Rightarrow$  возбужденное состояние молекул  $\Rightarrow$  высвечивание.

## Свойства люминесценции

**Правило Стокса** (1852 г.) – длина волны испущенного кванта света, как правило, больше, чем поглощенного – **стоксова люминесценция**:

$$\hbar\omega_{\text{Л}}^{\text{с}} < \hbar\omega_{\text{П}}.$$

Возможна **антистоксова люминесценция** – испущенный квант света имеет длину волны меньше, чем поглощенный:

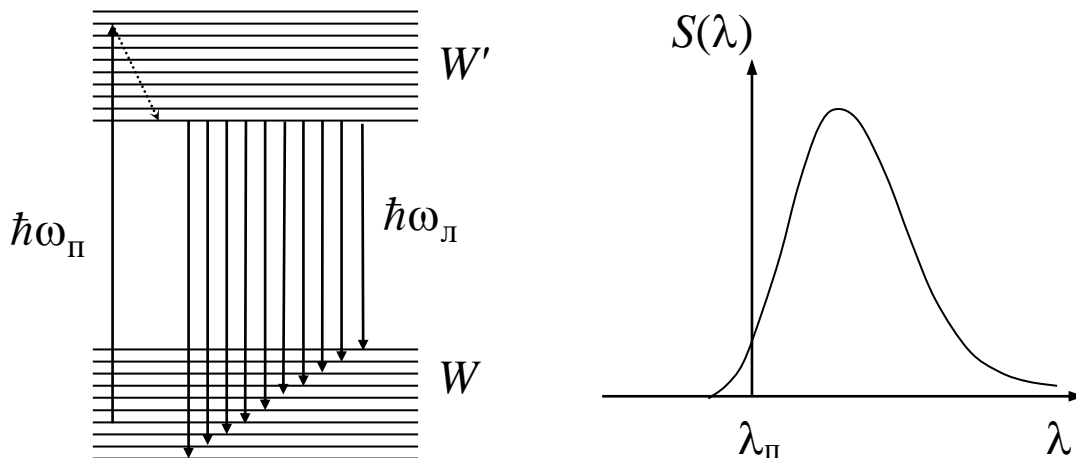
$$\hbar\omega_{\text{Л}}^{\text{ас}} > \hbar\omega_{\text{П}}.$$

В соответствии с распределением Больцмана  $N_i = N_0 e^{-\frac{W_i}{k_B T}}$ :

$$I^{\text{с}}(T) > I^{\text{ас}}(T), \text{ при } T \uparrow I^{\text{с}}(T) \downarrow, I^{\text{ас}}(T) \uparrow.$$

**Закон Стокса-Ломмеля** – спектр люминесценции в целом и его максимум всегда сдвинуты по сравнению со спектром поглощения и его максимумом в сторону длинных волн.

При спонтанной люминесценции успевает наступить термодинамическое равновесие по колебательным степеням свободы:  $\tau_{\text{кол}} \sim 10^{-11} \div 10^{-13} \text{ с} \ll \tau \sim 10^{-8} \div 10^{-9} \text{ с}$ . В этом случае **спектр люминесценции не зависит от длины волны возбуждающего света и ширина спектра люминесценции определяется шириной** нижней энергетической полосы, образованной набором уровней, соответствующих различным колебательным состояниям и одному электронному состоянию.



# Количественные характеристики процесса люминесценции

(1924 г., Сергей Иванович Вавилов)

**Энергетический выход** – отношение энергии люминесценции  $E_{\text{л}}$  к поглощенной энергии возбуждения  $E_{\text{п}}$  в тот же интервал времени:

$$B_{\text{э}} = E_{\text{л}} / E_{\text{п}} < 1.$$

При фотолюминесценции: **квантовый выход** – отношение числа испускаемых световых квантов  $q_{\text{л}}$  к общему числу поглощенных квантов  $q_{\text{п}}$  в тот же интервал времени:

$$B_{\text{кв}} = q_{\text{л}} / q_{\text{п}} < > 1.$$

В стационарном состоянии –  $B_{\text{э}} = \frac{E_{\text{л}}}{E_{\text{п}}} = \frac{q_{\text{л}} \cdot \hbar \omega_{\text{л}}}{q_{\text{п}} \cdot \hbar \omega_{\text{п}}} = B_{\text{кв}} \frac{\omega_{\text{л}}}{\omega_{\text{п}}}$ , где  $\omega_{\text{л}}$  и

$\omega_{\text{п}}$  – частоты люминесценции и поглощенного света.

## Закон затухания люминесценции

Для спонтанной (самостоятельной) люминесценции –

$$N(t) = N_0 e^{-(A_{\text{р}} + A_{\text{бн}})t}, \quad I(t) = I_{\text{р}}(t) + I_{\text{бн}}(t) \sim -\frac{\partial N(t)}{\partial t} = (A_{\text{р}} + A_{\text{бн}}) N_0 e^{-At}.$$

где  $A_{\text{р}}$  и  $A_{\text{бн}}$  – вероятности радиационного и безизлучательного переходов молекулы в основное состояние в единицу времени.

**Тушение люминесценции** – уменьшение выхода люминесценции  $B$  при увеличении вероятности безизлучательных переходов  $A_{\text{бн}}$ . Если вероятность  $A_{\text{бн}}$  постоянна в течение всего времени возбужденного состояния, то:

$$I_{\text{р}} \sim A_{\text{р}} N_0 e^{-At}, \quad I_{\text{бн}} \sim A_{\text{бн}} N_0 e^{-At} \quad \text{и} \quad B \sim \frac{I_{\text{р}}}{I} = \frac{I_{\text{р}}}{I_{\text{р}} + I_{\text{бн}}} = \frac{A_{\text{р}}}{A_{\text{р}} + A_{\text{бн}}}.$$

Механизм тушения – внутри- и межмолекулярные взаимодействия.

Виды тушения – температурное, концентрационное и примесное.

## Применение люминесценции

Активная среда квантовых генераторов.

Люминесцентные лампы.

Сцинтилляционные детекторы.

Экраны осциллографов, мониторов, телевизоров и т.д.

Электронно-оптические преобразователи.

Химический люминесцентный анализ (до  $\sim 10^{-9}$  г/см<sup>3</sup>).

Люминесцентная спектроскопия.

## Воздействие светового потока на заселенность уровней

Рассмотрим изменение заселенностей уровней под действием светового потока. Световой поток, вызывая вынужденные переходы (поглощение и вынужденное излучение) между уровнями, изменяет их заселенность. Пусть  $N = N_m + N_n = \text{const}$  – полная концентрация атомов в среде. Изменение заселенности верхнего уровня  $N_n$  происходит за счет вынужденных и спонтанных переходов и может быть в соответствии с определением коэффициентов Эйнштейна описано уравнением:

$$\frac{dN_n}{dt} = -A_{nm}N_n + B_{mn}N_m u(\omega_{nm}) - B_{nm}N_n u(\omega_{nm}).$$

При достижении стационарного состояния  $\frac{dN_n}{dt} = 0$ :

$$-A_{nm}N_n + B_{mn}N_m u(\omega_{nm}) - B_{nm}N_n u(\omega_{nm}) = 0,$$

$$A_{nm}N_n + B_{nm}N_n u(\omega_{nm}) = B_{mn}N_m u(\omega_{nm}),$$

$$A_{nm}N_n + B_{nm}N_n u(\omega_{nm}) = B_{mn}(N - N_n)u(\omega_{nm}),$$

$$N_n = \frac{B_{mn}u(\omega_{nm})}{A_{nm} + (B_{nm} + B_{mn})u(\omega_{nm})} N.$$

При увеличении спектральной плотности интенсивности  $S(\omega_{nm}) = \nu u(\omega_{nm})$  с учетом соотношения  $B_{mn}g_m = B_{nm}g_n$  получим:

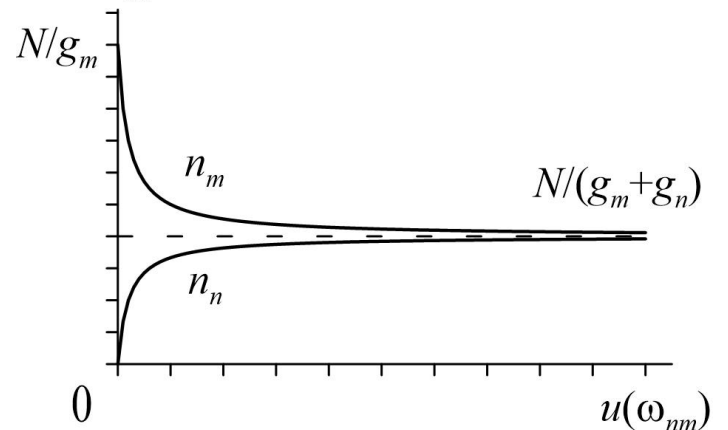
$$N_n \rightarrow \frac{B_{mn}}{B_{nm} + B_{mn}} N = \frac{g_n}{g_m + g_n} N, \quad n(u(\omega_{nm}))$$

$$N_m = N - N_n \rightarrow \frac{g_m}{g_m + g_n} N.$$

Следовательно:

$$n_n \equiv \frac{N_n}{g_n} \rightarrow \frac{N}{g_m + g_n},$$

$$n_m \equiv \frac{N_m}{g_m} \rightarrow \frac{N}{g_m + g_n}.$$



Как видим (см. рис.), световой поток выравнивает относительные заселенности двух уровней и не может создать инверсную заселенность между этими уровнями.



# Лазеры – устройство и принцип работы

## 1. Принципиальная схема лазера.

### Условия стационарной генерации

**Лазер** – оптический квантовый генератор – устройство, преобразующее произвольного вида энергию (электрическую, световую, химическую, тепловую и т.д.) в энергию когерентного электромагнитного излучения оптического диапазона.

**LASER** – "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation" – "Усиление света вынужденным излучением".

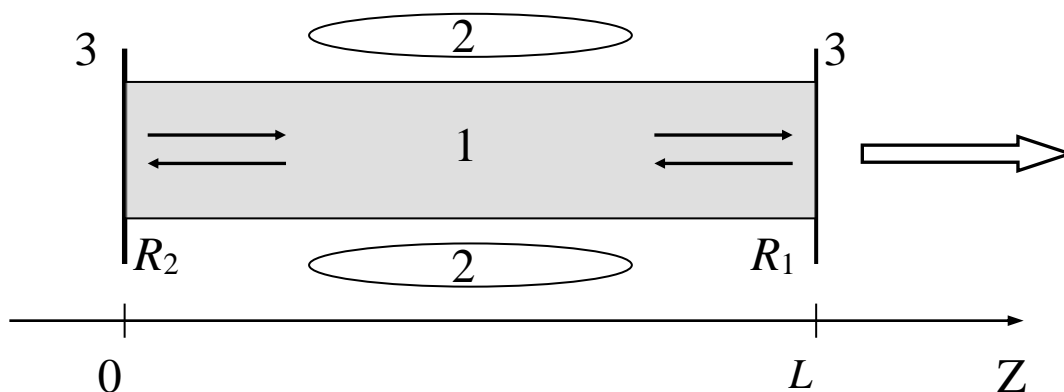
**Концепция лазера** – 1954 – 1955 гг.

Александр Михайлович Прохоров и Николай Геннадиевич Басов (лазер на пучке молекул мышьяка As; Ноб. премия 1964 г.),

Чарльз Хард Таунс и Артур Леонард Шавлов

(лазер на пучке молекул аммиака NH<sub>3</sub>; Ноб. премия 1964 г., 1981 г.).

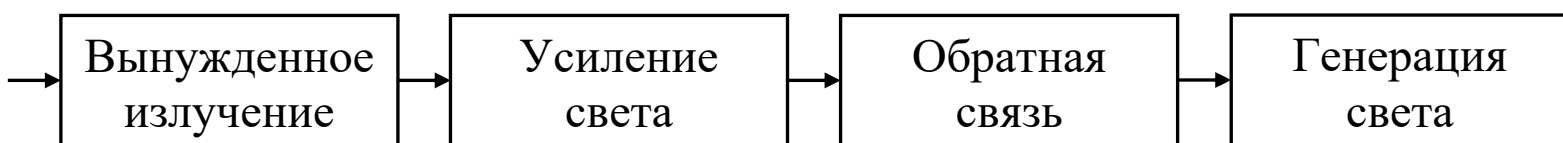
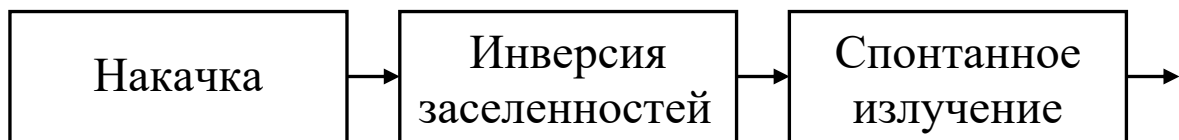
**Принципиальная схема лазера.** Три основных элемента.



1 – активная среда (рабочая среда с инверсной заселенностью уровней),

2 – система накачки (источник энергии для создания активной среды),

3 – оптический резонатор (обратная связь для генерации; зеркала).



## Условия стационарной генерации

**Элементарный цикл** – два последовательных прохождения через активную среду и соответствующие отражения от зеркал.

**Баланс амплитуд** – условие усиления для возникнов. генерации:

в конце эл. цикла –  $S(\omega) = S_0(\omega)R_1R_2e^{\beta_{nm}(\omega)2L}$ ,  $\frac{S(\omega)}{S_0(\omega)} = R_1R_2e^{\beta_{nm}(\omega)2L} > 1$

$$\beta_{nm}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{\nu} b_{nm}(\omega) g_n (n_n - n_m) > \beta_{\text{пор}} = \frac{\ln(1/\sqrt{R_1R_2})}{L} \equiv \frac{f}{L} - \text{порог. знач.}$$

$R_1$  и  $R_2$  – коэффиц. отражения (по энергии) зеркал;  $L$  – длина резонатора;  $\beta_{nm}(\omega)$  – линейный коэффиц. усиления света в активной среде.

**Баланс фаз** – условие цикличности для генерации:

$$2L = m\lambda_m, \lambda_m = \frac{2L}{m}, k_m = m\frac{\pi}{L}, \omega_m = m\frac{\pi\nu}{L}, T_m = \frac{2L}{m\nu}; m \sim 10^5 \div 10^7.$$

Для повышения мощности излучения необходимо накопить как можно больше возбужденных атомов, и уменьшить длительность импульсов, задержав начало генерации лазера.

Длительность импульса  $\tau$  определяется временем нахождения системы в условиях генерации и зависит от момента времени выхода системы из этих условий вследствие изменения инверсной заселенности ( $\beta(\omega) \downarrow$ ) или уменьшения добротности (увелич. потерь –  $\beta_{\text{пор}} \uparrow$ ).

**Добротность системы  $Q$**  – отношение запасенной в системе энергии  $W$  к потере энергии  $\Delta W$  за один период  $T_m$  свет. колебаний:

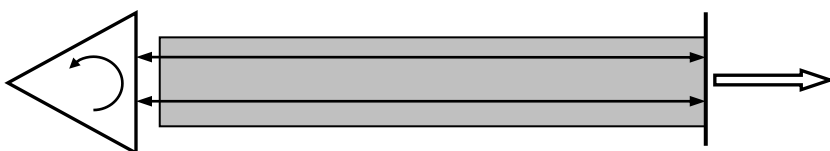
$$W = w\sigma L, \Delta W = \frac{w\sigma L}{2}(1 - R_1 + R_1(1 - R_2)) \frac{T_m}{2L/\nu} = \frac{w\sigma L}{2}(1 - R_1R_2) \frac{1}{m},$$

$$Q = \frac{W}{\Delta W} = \frac{2m}{1 - R_1R_2} = \frac{2m}{1 - e^{-2f}} \cong \frac{m}{f} = \frac{m}{\beta_{\text{пор}}L} = \frac{2}{\beta_{\text{пор}}\lambda_m}.$$

Здесь  $w$  – объемная плотность энергии поля,  $\sigma$  – площадь поперечного сечения лазерного пучка,  $T = 2L/\nu$  – продолжительность цикла.

**Метод модулированной добротности.**

Частота вращения зеркальной призмы  $\sim 10 \div 10^3$  Гц. Импульсы имеют ту же частоту следования, а длительность  $\tau$  – обычно  $10^{-7} \div 10^{-8}$  с.



Более частое повторение – с помощью поляризатора и ячейки Керра (до  $\sim 10^9$  Гц).

## 2. Продольные и поперечные моды.

### Спектральный состав излучения

**Стационарность и цикличность** → стоячая и бегущие волны.

Стоячая волна – суперпозиция гармонических стоячих волн – **мод колебаний**.

Для прямоугольного резонатора – два зеркала с  $n > 1$  вдоль оси Z и отсутствие зеркал ( $n < 1$ ) вдоль X и Y, с учетом комплексных коэффициентов отражения при  $\vartheta_I = 0$  –  $r_{\parallel} = r_{\perp} = (1-n)/(1+n)$  уравнение моды колебания (решение волнового уравнения) будет:

$$E(t, x, y, z) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(k_x x + \varphi_{x0}) \cos(k_y y + \varphi_{y0}) \cos(k_z z + \varphi_{z0}) = \\ = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z).$$

Излучение лазера – бегущие волны, соответствующие модам колебаний – **моды излучения лазера**; уравнение моды излучения:

$$E(t, x, y, z) = E_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0).$$

Условия цикличности (баланс фаз):

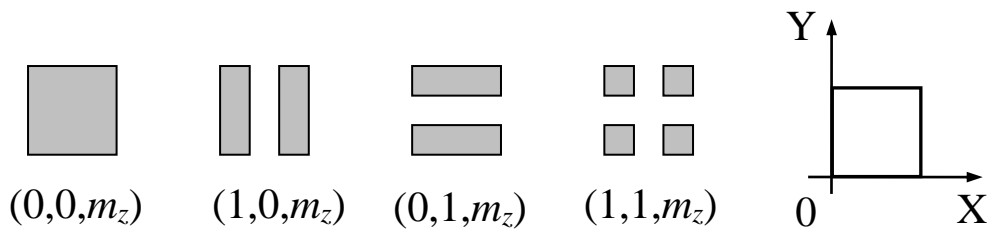
$$2l_{\alpha} = m_{\alpha} \lambda_{m_{\alpha}}, \quad k_{m_{\alpha}} = \frac{2\pi}{\lambda_{m_{\alpha}}} = m_{\alpha} \frac{\pi}{l_{\alpha}}, \quad m_{\alpha} = 0, 1, 2, \dots$$

где  $l_{\alpha}$  – линейные размеры ( $\alpha = x, y, z$ ), мода –  $(m_x, m_y, m_z)$ .

**Продольные моды** –  $(0, 0, m_z)$  – в плоскости XOY нет узлов:

$$k_{m_z} = \frac{2\pi}{\lambda_{m_z}} = m_z \frac{\pi}{L}, \quad \omega_{m_z} = k_{m_z} v = m_z \frac{\pi v}{L}, \quad \Delta\omega_z = \frac{\pi v}{L} \cong 2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}; \quad m_z \sim 10^5 \div 10^7.$$

**Поперечные моды** –  $m_x, m_y \neq 0$  – число узлов в плоскости XOY.



Из волнового уравнения –  $k_{m_x m_y m_z}^2 = k_{m_x}^2 + k_{m_y}^2 + k_{m_z}^2 = \omega_{m_x m_y m_z}^2 / v^2$ ,

$$\omega_{m_x m_y m_z} = \pi v \sqrt{(m_x / l_x)^2 + (m_y / l_y)^2 + (m_z / l_z)^2}.$$

**Ширины межмодовых интервалов** поперечных мод ( $L = l_z$ ,  $m_z \sim 2L/\lambda \sim 2 \cdot 10^6$ ,  $m_x \sim m_y \sim 1$  и  $k_{m_x, y} \ll k_{m_z}$  – из-за ориентации зеркал к оси Z):

$$\Delta\omega_{\alpha} = \frac{m_{\alpha}}{\omega_{m_x m_y m_z}} \left( \frac{\pi v}{l_{\alpha}} \right)^2; \quad \frac{\Delta\omega_{x, y}}{\Delta\omega_z} = \frac{m_x}{m_z} \left( \frac{L}{l_{x, y}} \right)^2 \sim \frac{\lambda}{2L} \cdot \frac{L^2}{l_{x, y}^2} = \frac{\lambda L}{2l_{x, y}^2} \sim 10^{-3} \ll 1.$$

## Спектральный состав излучения лазера

**Ширина линий излучения** –  $\delta\omega$  ( $\sim 1/\tau \sim 10^8 \text{ с}^{-1}$ ).

**Ширина межмодового интервала** –  $\Delta\omega_z = \pi v / L$  ( $\sim 2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ ).

**Полоса усиления** –  $[\omega_n, \omega_k]$ , при  $\omega \in [\omega_n, \omega_k]$   $\beta_{nm}(\omega) \geq \beta_{\text{пор}}$ .

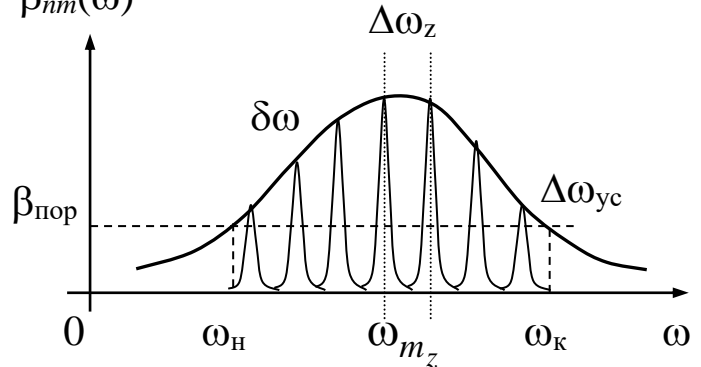
**Ширина полосы усиления** –  $\Delta\omega_{\text{ус}} = \omega_n - \omega_k$  ( $\sim 10^{10} \div 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ).

Форма и ширина лин. коэфф.  $\beta_{nm}(\omega)$

усиления  $\beta_{nm}(\omega)$  определяются спектральной линией  $a_{nm}(\omega)$  с учетом удар. и допл. уширений.

Число генерируемых мод:

$$N = \frac{\omega_k - \omega_n}{\Delta\omega_z} = \frac{\Delta\omega_{\text{ус}}}{\Delta\omega_z}.$$



Лазер $L \cong 0.5\text{м}$	He-Ne	$\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr}^{3+}$	Стекло:Nd	На красителе
$\Delta\omega_{\text{ус}}$	$(1 \div 2) \cdot 10^{10}$	$(2 \div 10) \cdot 10^{11}$	$\sim 2 \cdot 10^{13}$	$\sim 2 \cdot 10^{14}$
$N$	$5 \div 10$	$100 \div 500$	$\sim 10^4$	$\sim 10^5$

**Ширина линий излучения  $\delta\omega$**  определяется длительностью излучения  $\tau$  –  $\delta\omega \sim 1/\tau$ .

В импульсн. режиме с модуляцией добротности –  $\tau \sim 10^{-8} \text{ с}$  и  $\delta\omega \sim 10^8 \text{ с}^{-1}$ .

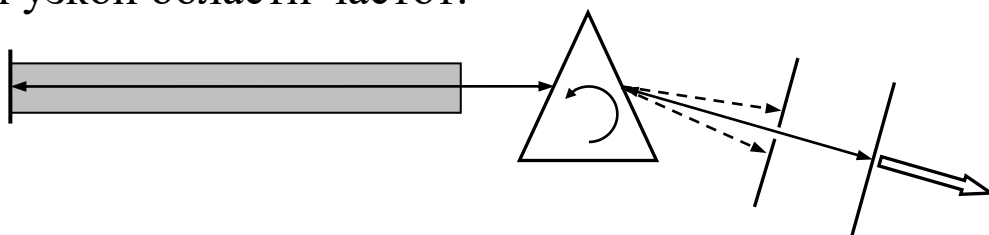
В непрерывном режиме теоретически  $\tau$  и  $\delta\omega$  – любые значения.

Практически – флуктуации  $n$ , изменения  $L$  (вибрации, тепловое расширение) и т.д. –  $\delta\omega \sim 10^7 \div 10^8 \text{ с}^{-1}$  (так как  $\omega_{m_z}(n, L) = m_z \frac{\pi v}{L} = m_z \frac{\pi c}{nL}$ ).

Принципиальные причины уширения – броуновское движение зеркал и спонтанное излучение атомами активной среды – до  $\delta\omega \sim 10^1 \div 10^3 \text{ с}^{-1}$ .

### Одномодовый лазер

Принципиальная схема. Внутри резонатора – **частотный фильтр** – диспергирующий элемент (призма, дифракционная решетка и т.д.) и диафрагма. Преодолимый порог генерации  $\beta_{\text{пор}}$  создается только для узкой области частот.



Вращение призмы – непрерывная перестройка частоты.

### 3. Синхронизация мод, генерация сверхкоротких импульсов.

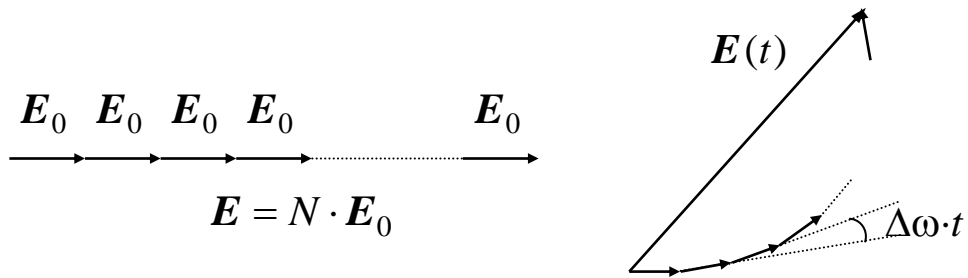
Длительность импульса  $\tau$ :

Метод модуляции добротности –  $\tau \sim 10^{-7} \div 10^{-8}$  с.

Ячейки Керра –  $\tau \sim 10^{-9}$  с.

Метод синхронизации мод –  $\tau \sim 10^{-12}$  с.

Синхронизация мод – согласование фаз различных мод –  $\omega_m = m \frac{\pi \nu}{L}$ .



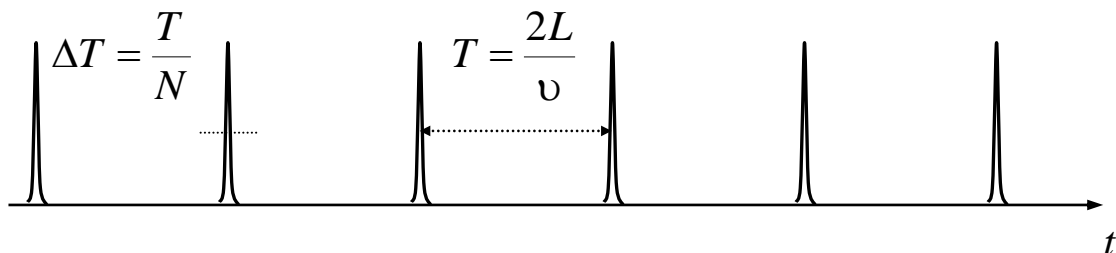
Межмодовый интервал для продольных мод –  $\Delta\omega = \pi \frac{\nu}{L}$  ( $\sim 10^9$  с $^{-1}$ ).

Через время  $t$  фазы волн относительно первой моды изменяются на  $\Delta\omega t, 2\Delta\omega t, 3\Delta\omega t, \dots, (N-1)\Delta\omega t$ . Со временем амплитуда уменьшается, а затем начинает возрастать с периодом повторения  $T$ , равным продолжительности цикла ( $2L/\nu$ ):

$$\Delta\omega \cdot T = 2\pi, \quad T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2L}{\nu}, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\nu}{2L}.$$

Продолжительность импульса  $\Delta T$  определяется из условия обращения в нуль амплитуды суммарной волны:

$$N\Delta\omega\Delta T = 2\pi, \quad \Delta T = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{2L}{N\nu} = \frac{T}{N}.$$



Для  $L = 0.1$  м и  $N = 10^3$ :  $\Delta T = \frac{2L}{N\nu} \cong \frac{2 \cdot 10^{-1}}{10^3 \cdot 3 \cdot 10^8} \cong 0.6 \cdot 10^{-12}$  с.

Самопроизвольная синхронизация или синхронизация методом модуляции добротности с периодом цикла  $T = 2L/\nu \cong 7 \cdot 10^{-9}$  с.

Мощность в импульсе –  $P = P_0 T / \Delta T = P_0 N$ , где  $P_0$  – средняя мощность лазера.

## 4. Характеристики лазеров

### А. Рубиновый лазер

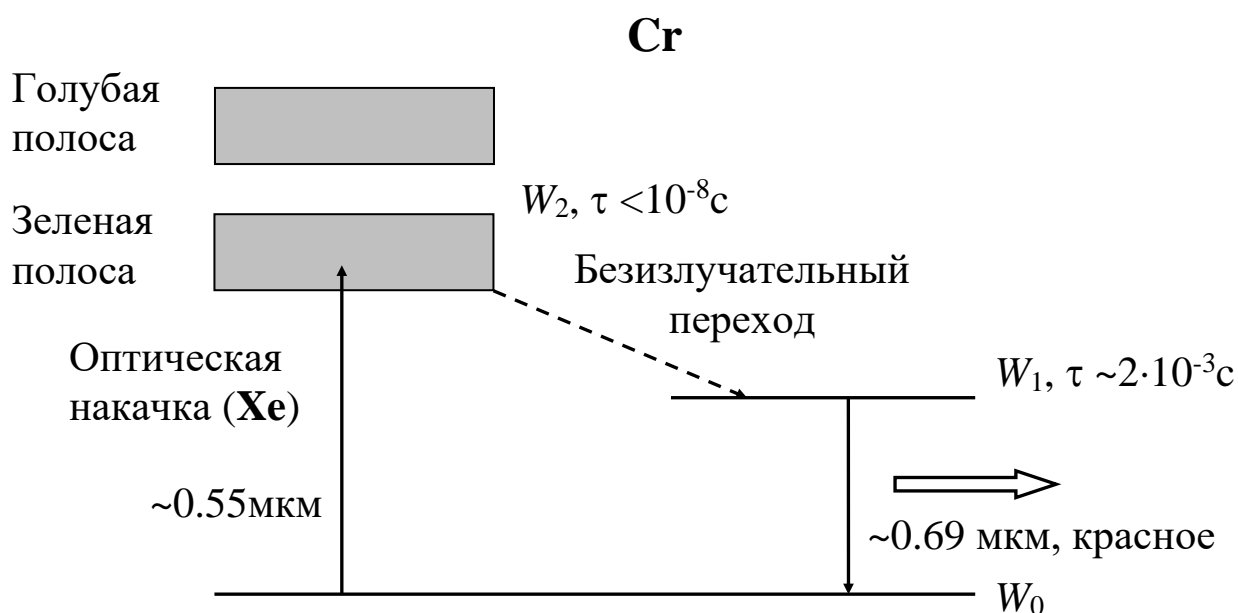
(Теодор Гарольд Мейман, 1960 г.)

**Активная среда** – корунд  $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr}^{3+}$  (0.05÷1 % оксида хрома  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ ).

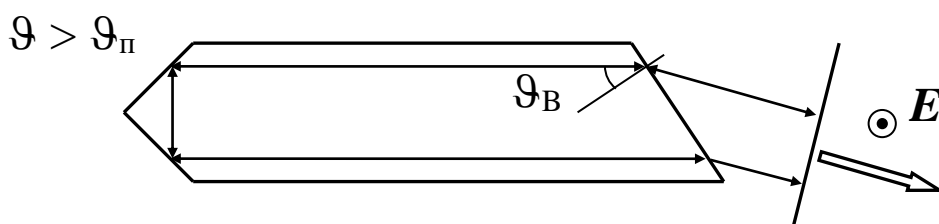
**Накачка** – импульсная оптическая – вспышка лампы **Xe** (~180 кВт).

**Генерация** – между энергетическими уровнями **Cr** в  $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr}^{3+}$ .

**Особенность** – импульсный режим.



Кристалл – цилиндр  $L \sim 5 \text{ см}$  и  $d \sim 1 \text{ см}$ .



Один конец кристалла срезан под углом, бóльшим угла полного внутреннего отражения  $\vartheta > \vartheta_{\text{п}}$ .

Другой конец кристалла срезан под углом Брюстера  $\vartheta_B$  – излучение линейно поляризовано параллельно грани кристалла (перпендикулярно плоскости падения – плоскости чертежа).

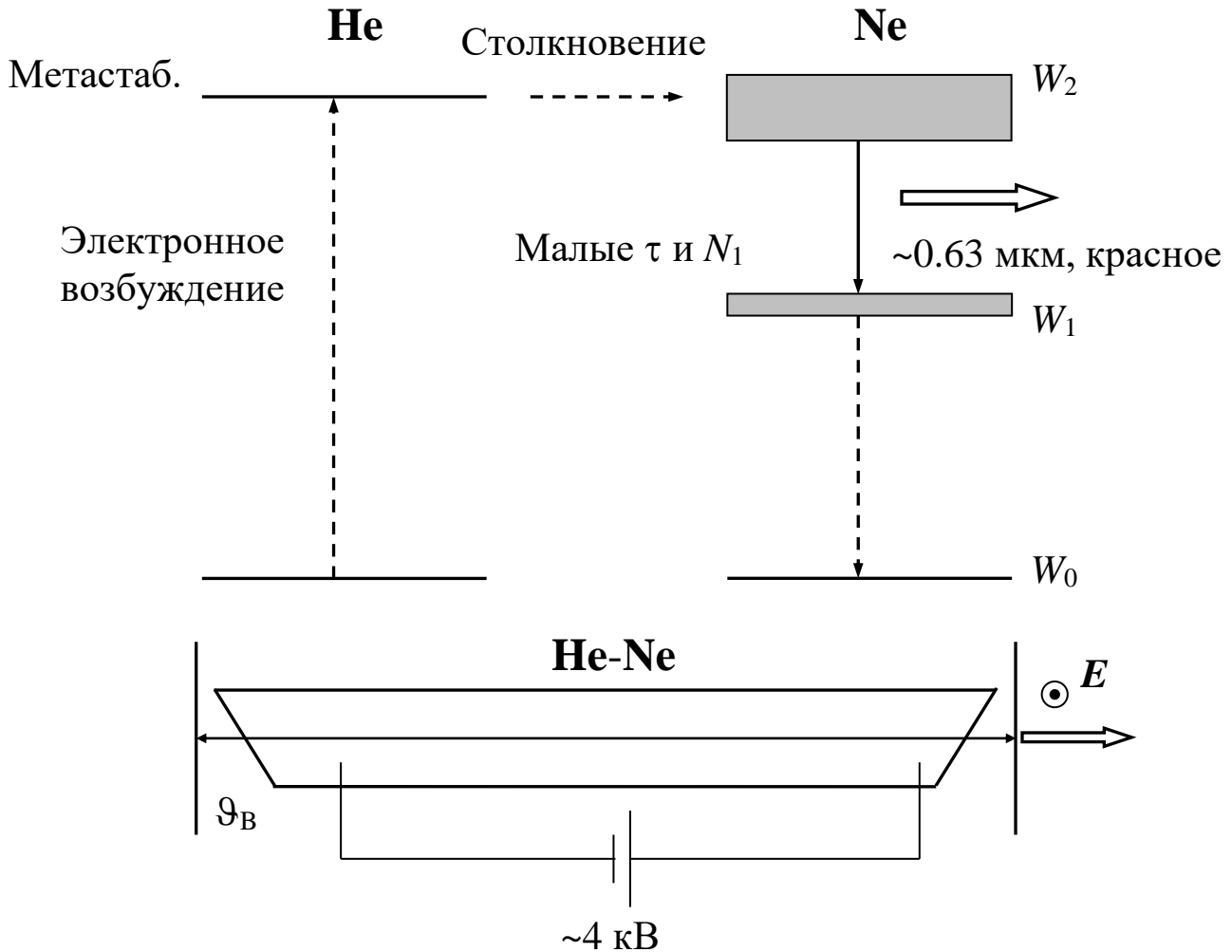
## Б. Гелий-неоновый лазер

**Активная среда** – газовая смесь **He** и **Ne**.

**Накачка** – электрический ток через газовую смесь – электронный удар по посреднику – атомам **He** ( $m_{\text{He}} = 4 \text{ а.е.м.} < m_{\text{Ne}} = 20 \text{ а.е.м.}$ ).

**Генерация** – между возбужденными энергетическими уровнями **Ne**.

**Особенность** –  $W_1$  – не основной уровень – легко достигается  $n_2 > n_1$  – малая мощность накачки, непрерывный режим.



Концы стеклянной лазерной трубки, где находится активная смесь газов, закрыты прозрачными пластинками, наклоненными под углом Брюстера – излучение линейно поляризовано.

## В. Лазер на углекислом газе

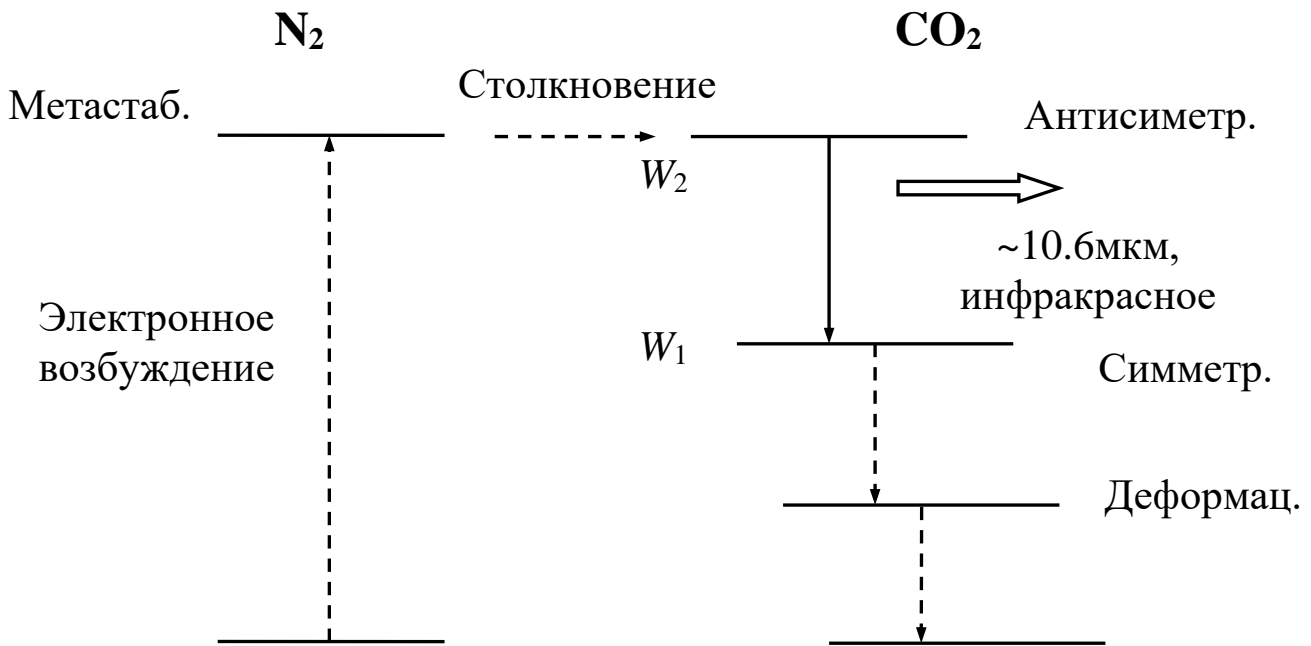
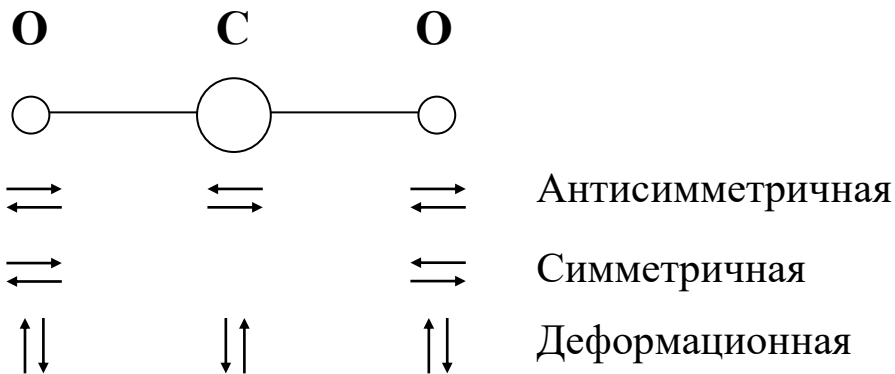
**Активная среда** – газовая смесь  $\text{CO}_2 + \text{N}_2 + \text{He}$ .

**Накачка** – электрический ток – электронный удар по посреднику – молекулам  $\text{N}_2$ .

**Генерация** – между колебательными подуровнями  $\text{CO}_2$ .

**Особенность** –  $W_1$  – не основной уровень, ат. **He** для  $\downarrow \tau_{\text{симм.}}$  – малая мощность накачки ( $P \sim 150$  Вт), непрерывный режим.

**Моды колебаний** линейной центросимметрич. молекулы  $\text{CO}_2$ .



Для уменьшения заселенности уровня симметричных колебаний молекулы  $\text{CO}_2$  в смесь добавляют **He**.



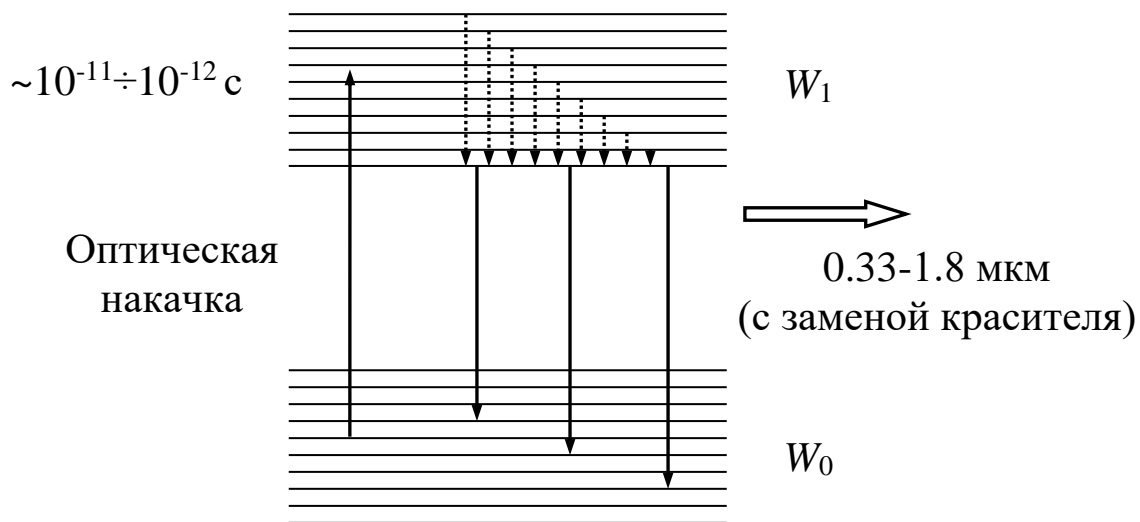
## Г. Лазеры на органических красителях

**Активная среда** – сложные органические соединения (красители).

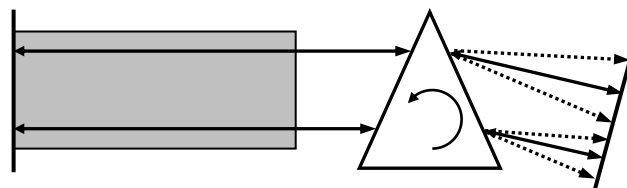
**Накачка** – оптическая (импульс.), лазерная (импульс., непрер.).

**Генерация** – между квазинепрерывными колебательными подуровнями.

**Особенность** – возможность плавной перестройки в широком диапазоне длин волн, импульсный режим (оптическая накачка), непрерывный режим (лазерная накачка).



Частотный фильтр – преодолимый порог генерации создается только для узкой области частот. Вращение призмы – непрерывная перестройка частоты.



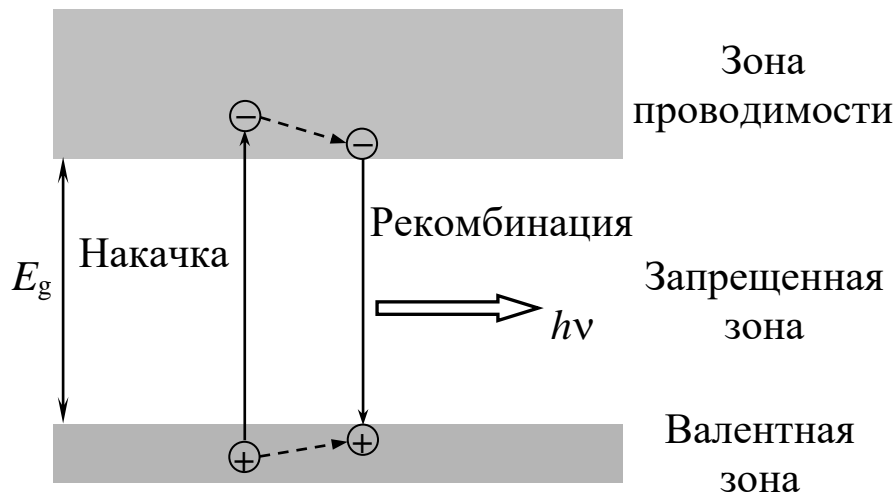
## Д. Полупроводниковый лазер

**Активная среда** – твердотельный полупроводник.

**Накачка** – электрическим током (прямая накачка) ( $\sim 3$  В);  
– электронным пучком;  
– оптическая (квантами с  $h\nu > E_g$ ).

**Генерация** – между разрешенными зонами полупроводника.

**Особенность** – малые размеры (коллективно атомы кристаллич. решётки), высокий КПД, простота конструкции.



Межзонная люминесценция – излучение в результате рекомбинации созданных внешним воздействием избыточных электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне.

Длину волны  $\lambda$  лазерного излучения можно выразить через **ширину запрещённой** зоны  $E_g$ :

$$\lambda = hc / E_g.$$

Полупроводниковые лазеры покрывают спектральный диапазон от  $\lambda \cong 0,30$  мкм (ближняя УФО) до  $\lambda \cong 45$  мкм (средняя ИКО).

## Лазерный диод

Полупроводниковый лазер на базе диода с прямой накачкой.

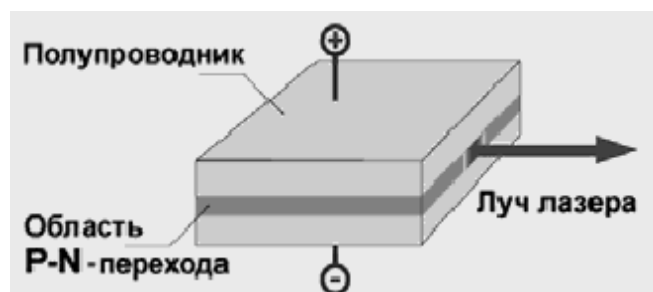
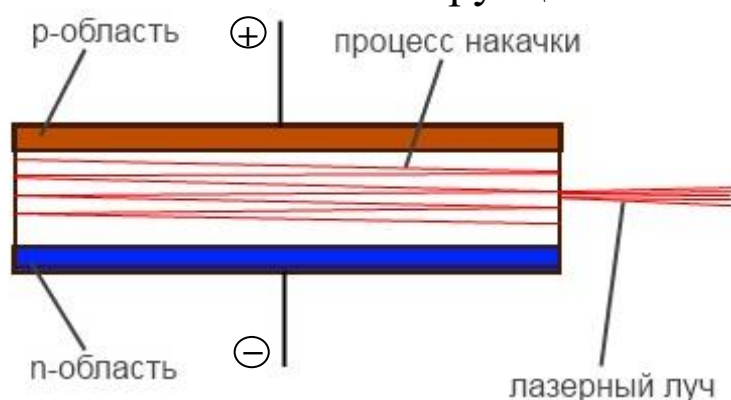
**Активная среда** – полупроводниковый диод в виде тонкой легированной монокристаллической пластины – волновода.

**Накачка** – электрическим током (прямая накачка).

**Оптический резонатор** – полированные (сколотые) торцевые стороны полупроводниковой пластины

**Генерация** – между энергетическими уровни p- и n-областей полупроводника.

**Особенность** – малые размеры, высокий КПД, простота конструкции.



При подаче положительного потенциала на анод диода, дырки из p-области инжектируются в n-область, а электроны из n-области – в p-область p-n-перехода. Если электрон и дырка оказываются поблизости, то они могут **спонтанно рекомбинировать с испусканием фотона** определённой длины волны.

Электрон и дырка могут находиться поблизости достаточно долго (до микросекунд). Случайный фотон спонтанного излучения, испущенный вдоль резонатора, вызовет **вынужденную рекомбинацию** электронов и дырок, создавая новые фотоны с теми же характеристиками. Излучение будет усиливаться, и, как только усиление превысит потери, начнётся лазерная генерация.

Длина волны излучения лазерного диода определяется шириной запрещённой зоны между энергетическими уровнями p- и n-областей полупроводника.

Дифракционное уширение пучка на выходе устраняют с помощью собирающей линзы.

## Красная лазерная указка

**Лазерный диод** (полупроводниковый диод с прямой накачкой), который излучает в диапазоне 0.635–0.671 мкм, с двояковыпуклой линзой-коллиматором.

Для питания лазерного диода используется небольшая плата-драйвер. Мощность – от 1 мВт до 1000 мВт.

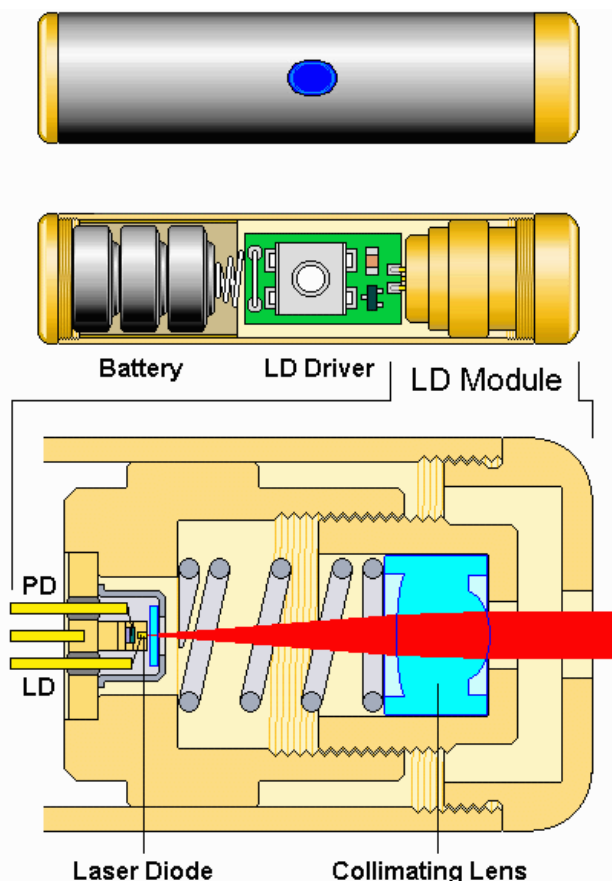
КПД системы до 50%.

Мощные красные указки мощностью до 1000 мВт, способны зажигать хорошо поглощающие излучение материалы.

Самый распространённый тип лазерных указок.

Реже в красных лазерных указках используется **твердотельный лазер с лазерной диодной накачкой**. Эти указки работают на длине волны 0.671 мкм.

Отличаются от указок на лазерном диоде круглым сечением светового пучка (у обычной лазерной указки пучок уплощён вследствие астигматизма резонатора лазерного диода).



## Зеленая лазерная указка

Твердотельный лазер с лазерной диодной накачкой и удвоением частоты.

**Активная среда** – кристалл ортованадата иттрия с легированным неодимом ( $\text{YVO}_4:\text{Nd}$ ;  $\lambda = 1.064$  мкм) или алюмоиттриевого граната  $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ .

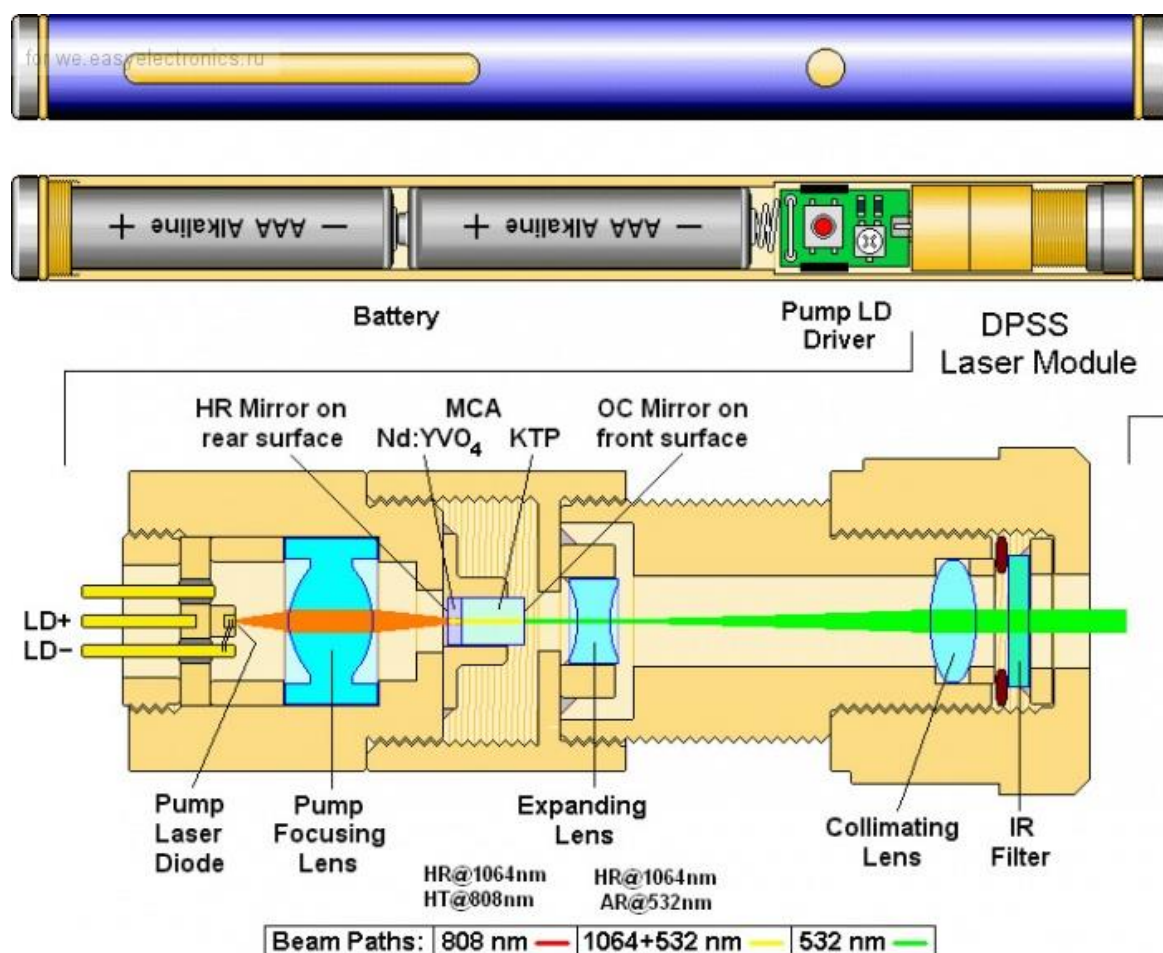
**Накачка** – мощное ( $>100$  мВт) излучение инфракрасного ( $\lambda = 0.808$  мкм) лазерного диода.

**Оптический резонатор** – торцевые стороны кристалла  $\text{YVO}_4:\text{Nd}$

**Генерация** – энергетические уровни Nd в  $\text{YVO}_4$  ( $\lambda = 1.064$  мкм).

**Генерация второй гармоники** – кристалл титанила-фосфата калия  $\text{KTiOPO}_4$ , излучение с  $\lambda = 0.532$  мкм.

**Особенность** – малые размеры, высокий КПД ( $\sim 20\%$ ).



На выходе – ИК-фильтр, чтобы убрать остатки излучения от лазерного диода накачки.

## Характеристики лазерного излучения

### Рекордные значения:

минимальная длительность импульса –  $\tau \sim 4.5 \cdot 10^{-15}$  с,  
мощность непрерывной генерации –  $P \sim 10^6$  Вт.

### Для термоядерного синтеза:

длительность импульса –  $\tau \sim 10^{-9}$  с,  
энергия импульса –  $W \sim 10^5$  Дж (достаточно, чтобы вскипятить  
~300 г воды),  
мощность импульса –  $P \sim 10^{14}$  Вт,  
интенсивность света –  $I \sim 10^{23}$  Вт/м<sup>2</sup>,  
напряженность поля в световой волне –  $E \sim 10^{13}$  В/м  
( $> E_{ат} \sim 10^{12}$  В/м).

# Нелинейные оптические явления

## 1. Поляризация среды в поле высокоинтенсивного лазерного излучения

Электрическая поляризация среды в сильном поле:

$$P(t) = \varepsilon_0 \left( \kappa E(t) + \chi E^2(t) + \xi E^3(t) + \dots \right) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + \dots,$$

$\kappa$  – линейная (оптическая) восприимчивость,

$\chi$  – нелинейная восприимчивость второго порядка,

$\xi$  – нелинейная восприимчивость третьего порядка.

Разложение в ряд по отношению  $\frac{\chi E^2}{\kappa E} \sim \frac{\xi E^3}{\chi E^2} \sim \frac{E}{E_{\text{ат}}}$ .

Оценка: 
$$E_{\text{ат}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ze}{r_{\text{ат}}^2} \cong 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{20 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{10^{-20}} \cong 3 \cdot 10^{12} \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t - kz),$$

$$P(t) = \varepsilon_0 \left( \kappa E_0 \cos(\omega t - kz) + \chi E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) + \xi E_0^3 \cos^3(\omega t - kz) + \dots \right).$$

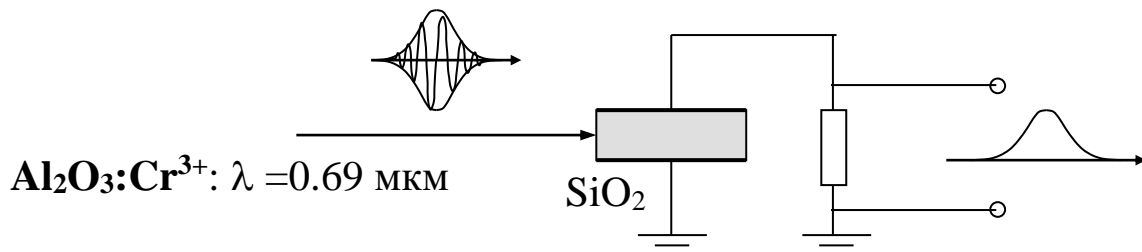
## 2. Среды с квадратичной нелинейностью.

$$P(t) \cong \varepsilon_0 \left( \kappa E(t) + \chi E^2(t) \right) = P_1(t) + P_2(t).$$

Оптическое детектирование, генерация гармоник

$$P_2(t) = \varepsilon_0 \chi E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi E_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi E_0^2 \cos(2\omega t - 2kz).$$

Оптическое детектирование (1962 г.) – выпрямление высоко-частотного светового поля:  $U(t) \sim \sigma(t) \sim \langle P(t) \rangle \sim \langle E^2(t) \rangle \sim E_0^2(t) = I(t)$ .



Генерация второй гармоники (1961 г., Р.А. Franken):

$$E_{\text{изл}}(t) \sim \ddot{P}_1 + \ddot{P}_2 = \varepsilon_0 \kappa \omega^2 E_0 \cos(\omega t - kz) + 2\varepsilon_0 \chi \omega^2 E_0^2 \cos(2\omega t - 2kz).$$

### 3. Среды с кубической нелинейностью.

#### Самофокусировка волновых пучков, генерация гармоник

Для изотропных сред или кристаллов с центром симметрии:

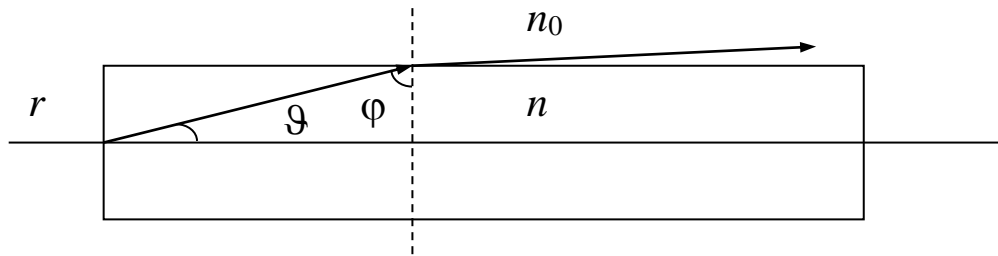
$$P(-E) = -P(E) \Rightarrow P(t) = \varepsilon_0 \left( \kappa E(t) + \xi E^3(t) + \dots \right) \cong P_1(t) + P_3(t);$$

$$P_3(t) = \varepsilon_0 \xi E_0^3 \cos^3(\omega t - kz) = \\ = \varepsilon_0 \xi E_0^2 \cdot \frac{3}{4} E_0 \cos(\omega t - kz) + \varepsilon_0 \xi E_0^3 \cdot \frac{1}{4} \cos(3\omega t - 3kz).$$

**Изменение показателя преломления среды:**

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + \kappa + \frac{3}{4} \xi E_0^2} \cong n_0 + \frac{3}{8n_0} \xi E_0^2, \quad n = n_0 + n_2 E_0^2.$$

**Самофокусировка волновых пучков ( $n_2 > 0$ ).**



**Полное внутреннее отражение**

$$\cos \vartheta_{\text{п}} = \sin \varphi_{\text{п}} = \frac{n_0}{n} = \frac{n_0}{n_0 + n_2 E_0^2}, \quad 1 - \frac{1}{2} \vartheta_{\text{п}}^2 \cong 1 - \frac{n_2 E_0^2}{n_0}, \quad \vartheta_{\text{п}}^2 \cong 2 \frac{n_2 E_0^2}{n_0}.$$

Дифракционное расширение пучка радиуса  $r$  –  $\vartheta_{\text{д}} = 0.61 \frac{\lambda}{r} = 0.61 \frac{\lambda_0}{r \cdot n_0}$ .

1.  $\vartheta_{\text{д}} > \vartheta_{\text{п}}$  – **расширение пучка** (при  $P < P_{\text{пор}}$ ).
2.  $\vartheta_{\text{д}} \cong \vartheta_{\text{п}}$  – **самоканалирование светового пучка** (при  $P = P_{\text{пор}}$ ).
3.  $\vartheta_{\text{д}} < \vartheta_{\text{п}}$  – **самофокусировка** (при  $P > P_{\text{пор}}$ ).

**Пороговая мощность  $P_{\text{пор}}$**  определяется из условия  $\vartheta_{\text{д}} \cong \vartheta_{\text{п}}$ :

$$P_{\text{пор}} = I_{\text{п}} \pi r^2 = \varepsilon_0 \varepsilon \nu \frac{E_0^2}{2} \pi r^2 = \frac{\pi \varepsilon_0 c}{4n_2} (0.61 \lambda_0)^2 \quad (\sim 1 \text{ кВт}).$$

**Генерация третьей гармоники (1963 г.).**

$$E_{\text{изл}}(t) \sim \ddot{P}_1 + \ddot{P}_3 = \varepsilon_0 \left( \kappa + \frac{3}{4} \xi E_0^2 \right) \omega^2 E_0 \cos(\omega t - kz) + \frac{9}{4} \varepsilon_0 \xi \omega^2 E_0^3 \cdot \cos(3\omega t - 3kz).$$



## 4. Тепловое самовоздействие излучения

**Тепловое самовоздействие излучения** – тепловое воздействие светового пучка на оптические свойства среды и, как результат, влияние на распространение самого пучка.

Распространение светового пучка  $\Rightarrow$  поглощение энергии  $\Rightarrow$  повышение температуры  $\Rightarrow$  изменение оптических свойств среды (показателя преломления)  $\Rightarrow$  влияние на распространение пучка.

Показатель преломления среды  $n(\rho, T)$ :

$$\Delta n(\rho, T) = \left( \frac{\partial n(\rho, T)}{\partial \rho} \right)_T \Delta \rho + \left( \frac{\partial n(\rho, T)}{\partial T} \right)_\rho \Delta T = n_T \Delta T, \text{ где}$$

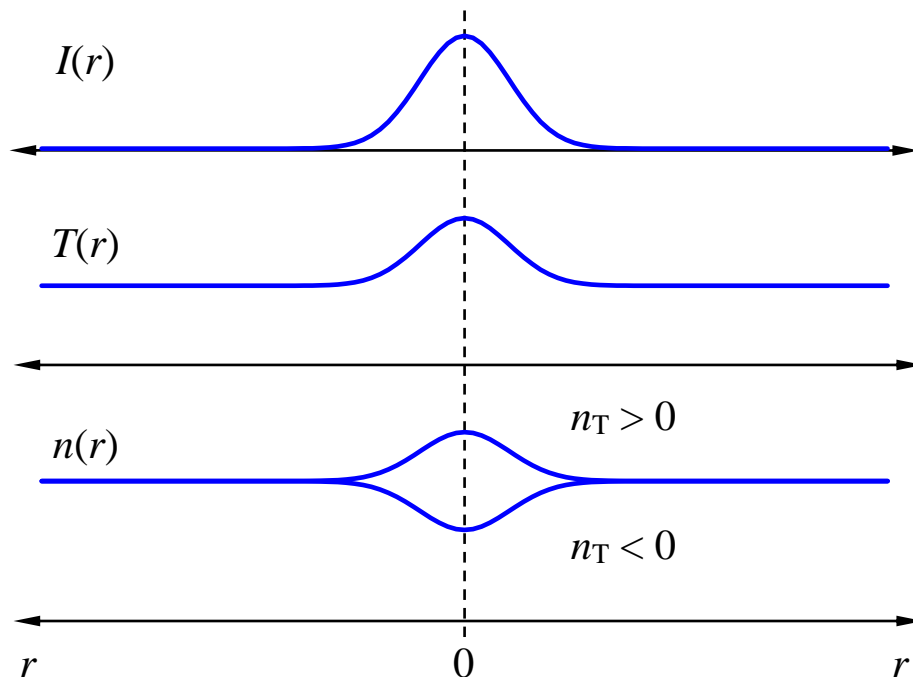
$$n_T = \left( \frac{\partial n(\rho, T)}{\partial \rho} \right)_T \left( \frac{\partial \rho(p, T)}{\partial T} \right)_p + \left( \frac{\partial n(\rho, T)}{\partial T} \right)_\rho -$$

– полная производная показателя преломления по температуре, которая является характеристикой вещества.

Профиль температуры – колокообразная форма – температура убывает от оси пучка к его периферии. Профиль показателя  $n(r)$ :

- **фокусирующие среды** ( $n_T > 0$ ) – распределенная тепловая собирающая линза – **тепловая самофокусировка**.

- **дефокусирующие среды** ( $n_T < 0$ ) – распределенная тепловая рассеивающая линза – **тепловая дефокусировка**.



В дальней зоне дифракции из-за дефокусировки световой пучок приобретает **нелинейную расходимость**  $\mathfrak{D}_{\text{нл}}$ , которая может в несколько раз превышать дифракционную расходимость пучка  $\mathfrak{D}_d$ .

В случае гауссова светового пучка с профилем интенсивности  $I(r) = I_0 e^{-2r^2/r_0^2}$  и стационарного режима:

$$T(r) = T(0) - \frac{\alpha I_0}{4\kappa_T} r^2, \quad n(r) = n(0) - \frac{\alpha I_0 n_T}{4\kappa_T} r^2,$$

где  $\alpha$  – коэффициент поглощения и  $\kappa_T$  – коэффициент теплопроводности среды. В этом случае нелинейная расходимость равна:

$$\mathfrak{D}_{\text{нл}} = \frac{\alpha l |n_T| r_0}{2\kappa_T} I_0, \quad (I_0 \uparrow \Rightarrow \mathfrak{D}_{\text{нл}} \uparrow),$$

где  $l$  – толщина распределенной тепловой линзы.

При **критической мощности тепловой дефокусировки**  $P_{\text{кр}}$  нелинейная расходимость равна дифракционной расходимости:

$$\mathfrak{D}_{\text{нл}}(I_{\text{кр}}) = \mathfrak{D}_d = \frac{\lambda}{\pi r_0},$$

$$P_{\text{кр}} = \frac{I_{\text{кр}} \pi r_0^2}{2} = \frac{\lambda \kappa_T}{|n_T| \alpha l}.$$

Критическая мощность тепловой дефокусировки значительно меньше, чем пороговая мощность в нелинейных средах.

Тепловая нелинейность обладает сравнительно большим временем установления стационарного состояния – ~ несколько секунд.

Вертикальная и горизонтальная геометрии светового пучка при наблюдении картины дефокусировки на экране.

При вертикальной геометрии распространения в среде светового пучка профиль изображения на экране имеет осевую симметрию.

При горизонтальной геометрии – профиль на экране становится серповидным из-за появления восходящих конвекционных потоков в среде (жидкости), искажающих распределенную тепловую рассеивающую линзу.